DOTT. ALBINO NAGY

PROFESSORE DI FILOSOFIA AL LICEO MANCINELLI

DI VELLETRI

PRINCIPI DI LOGICA

ESPOSTI

SECONDO LE DOTTRINE MODERNE

TORINO

ERMANNO LOESCHER

FIRENZE — ROMA

Via Tornabuoni, 20 — Via del Corso, 307

1891

PREFAZIONE

Di solito ogni autore usa giustificare i suoi scritti con certe ragioni, che agli altri paiono più o meno valide e che egli espone nella prefazione. Son per lo più lacune da colmare, bisogni dagli studiosi fortemente sentiti da soddisfare, od altre cause consimili che incitarono lo scrittore all'opera. Io non so se per un trattato di logica convenga ricorrere a queste spiegazioni: però non vorrei che fosse frainteso il mio divisamento.

Grazie alla cortesia dell'illustre Prof. LUIGI FERRI, mi fu concesso di esporre alla Scuola di Magistero della R. Università di Roma e quindi di riprodurre nella *Rivista italiana di filosofia* (fasc. nov.-dic. 1891), alcune considerazioni intorno allo stato attuale ed ai progressi della logica. In esse cercai di porre in luce in quanta più luce era possibile, lo stato veramente desolante in cui si trova questa scienza presso di noi; e mi sforzai d'altra parte di richiamare l'attenzione sul vasto e profondo rivolgimento della logica, a cui concorrono, con attività incessante, i forti studî che si fanno dal nobile popolo inglese, sì in Europa che negli Stati Uniti. Perciò parmi sarebbe un drammatizzare

la situazione il parlare di *lacune e di bisogni fortemente sentiti:* perchè, da noi, di tutto questo movimento non c'è nemmeno una lontana eco [1]) e nessuno domanda libri di logica. Ma, conveniamo, appunto le mancanze di questi motivi ci sconforta e ci addita un male, che, per quanto sta in noi, vorremmo sanare.

Non voglio essere frainteso. Il mio intendimento è di rendere famigliari in Italia le dottrine della moderna scuola inglese, della quale il presente lavoro raccoglie i risultati, che altrimenti sarebbero difficilmente accessibili, perchè sparsi disordinatamente in un mare di riviste, atti accademici, opuscoli, scritti in inglese, in francese, in tedesco ecc. Questi risultati costituiscono un reale progresso della logica aristotelica e la loro importanza mi sembra tanto grande da non ammettere indugio nel renderli noti.

Come rilevai nel suaccennato lavoro inserito nella *Rivista,* i meriti principali della logica matematica consistono:

1) nella espressione diretta ed immediata dei concetti e delle loro relazioni mediante un adatto simbolismo, indipendente dalle particolarità e dalle variazioni del linguaggio

2) nello studio delle relazioni di più concetti: mentre la logica tradizionale, vincolata al principio psicologico della dicotomia nel giudizio si limitava allo studio delle relazioni di due concetti soltanto (soggetto

1) Con ciò non voglio togliere il merito al ch.mo Prof. GIUSEPPE PEANO, dell'Università di Torino che arditamente iniziò nell'88, coll'opera: *Calcolo geometrico.... preceduto dalle operazioni della logica deduttiva.* Torino, Bocca, e, negli scritti che cito alla nota 4), e nella Rivista di matematica da lui fondata quest'anno, intrepidamente propugna le nuove dottrine. Però siccome la sua attività è più specialmente rivolta alla matematica ed ai matematici, i suoi studi, purtroppo, furono dagli studiosi di filosofia poco o punto convenientemente conosciuti ed apprezzati.

e predicato). I sigg. JEVONS e CLIFFORD si accinsero alla risoluzione del problema generale: quanti e quali giudizî si possono enunciare con n concetti? considerando intanto i casi n 3, 4.

La dottrina del sillogismo e dell'inversione dei giudizi venne ampliata analogamente, proponendosi la eliminazione di un qualsivoglia numero di termini medî e la risoluzione per un qualunque termine di un sistema di relazioni logiche simultanee.

Nè vale l'obbiezione che, per tal modo, la logica venga subordinata alla matematica e che essa diventi un'applicazione di quest'ultima scienza e come tale non arrechi reale progresso - come non lo arrecarono le invasioni di altre discipline ausiliarie della logica, cioè della psicologia, della metafisica, della scienza del linguaggio. Perchè, come giustamente osserva il Professor Peano (*Rivista di matematica,* fasc. aprile-maggio, 1891, p. 67) « la matematica non è che una logica perfezionata. » Il simbolismo e la rappresentazione diretta delle relazioni logiche esiste *prima* della matematica: è una teoria più vasta e generale, regolatrice di tutti i nostri pensieri, dalla quale la matematica deriva, come parte speciale, coll'assumere in aggiunta alcuni altri assiomi, che ad alcuni concetti particolari, cioè a quelli di quantità concrete o discrete, si riferiscono.

Del resto, per affermare la potente efficacia del calcolo logico, basterà ricordare solo alcuni dei numerosi e brillanti risultati pratici, che s'ottennero.

Già il BOOLE [1]), oltre molti quesiti da lui proposti

1) *An investigation of the laws of thought....* London, Walton & Maberly, Cambridge, Macmillan & c. 1854 - p. 185-219.

e risolti, espose e criticò in questo linguaggio simbolico le dottrine del Clarke intorno all'esistenza e agli attributi di Dio, e parte dell'*Etica* dello Spinoza. Si può leggere nel recente libro dello SCHRÖDER [1]) una serie di problemi, estratti da varie opere di logica matematica; ma un'applicazione certamente importante è quella fatta dal Prof. PEANO, nella esposizione rigorosamente scientifica dei principî dell'Aritmetica e della Geometria [2]). Progressi incontrastabili furono fatti nel campo della teoria logica delle probabilità; e per mostrare la utilità didattica del calcolo logico citerò l'esperimento testè fatto dal Prof. VENN [3]), che propose un medesimo quesito di logica a due classi parallele d'alunni, una istruita nella logica tradizionale, l'altra nella logica matematica. Fu un vittoria incontrastabile: i risultati di quest'ultima furono incomparabilmente superiori a quelli della prima. Infine si vedrà nella presente esposizione, come innumerevoli controversie, che per lungo tempo vennero agitate (p. es. circa il significato della *negazione*, o quello della *particolarità* d'un giudizio, ecc.) furono definitivamente decise o tolte di mezzo.

Laonde, sembrami, sarà pienamente giustificato questo tentativo di render popolare tale genere di studî; tanto più che il sentimento della necessità di diffon-

---

1) *Vorlesungen über Algebra der Logik*, I vol. Leipzig, Teubner, 1890 pag. 521-558.

2) *Aritmeticae principia* nova methodo exposita. Torino, Bocca, 1889.

I principî di geometria logicamente esposti. Torino, Bocca, 1889.

Les propositions du cinquième livre d'Euclide, réduites en formules (Mathesis t. X).

Démonstration de l'integrabilité des équations différentielles ordinaires (Math. Ann. t. XXXVII).

3) SCHRÖDER *op. cit.* p. 528.

derlo tra i cultori della filosofia è condiviso da tutti gli scrittori suaccennati. Così l'illustre Prof. SCHRÖDER mi scriveva (in data 31/5 1890): « da es noch gilt der neuen Disziplin die Anerkennung der Mathematiker sowol als der Philosophen erst zu erobern, so freue ich mich ganz besonders in Ihnen einen unvermutheten thätigen Mitarbeiter gefunden zu haben.... », e il Professor PEANO (2/8, 1888) ».... certo queste dottrine si renderanno famigliari in Italia e fuori se un certo numero di persone studiose e volonterose vi si dedicherà, farà delle pubblicazioni, le criticherà... Tocca a noi abbreviare questo tempo, richiamandovi l'attenzione degli studiosi. »

Per quanto riguarda i capitoli speciali della presente opera devo però osservare che eccetto la dottrina del concetto, svolta dallo SCHRÖDER nel libro citato, la dottrina del giudizio e quella del sillogismo, ma più ancora delle forme sistematiche, non erano ancor state trattate nella loro interezza; di modo che tranne alcuni accenni ai lavori del MC COLL [1]) e del PEIRCE [2]), i capitoli suddetti sono presso che nuovi e contengono i risultati di investigazioni mie particolari.

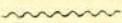
Ho dato una breve notizia sulla dottrina del numero e dei tipi dei Giudizî fra più quantità, la cui importanza ritengo sia fondamentale per la logica nuova. Pubblicherò fra breve, in altro luogo, i risultati di ulteriori ricerche intorno al medesimo soggetto. Nella dottrina delle leggi del pensiero mi attenni, nel disegno

---

1) *The calculus of equivalent statements.* (Proc. of the Lond. Math. Soc. Vol. IX-XI).

2) *On the algebra of logic.* (Amer. Journ. of. Math. Vol. VII).

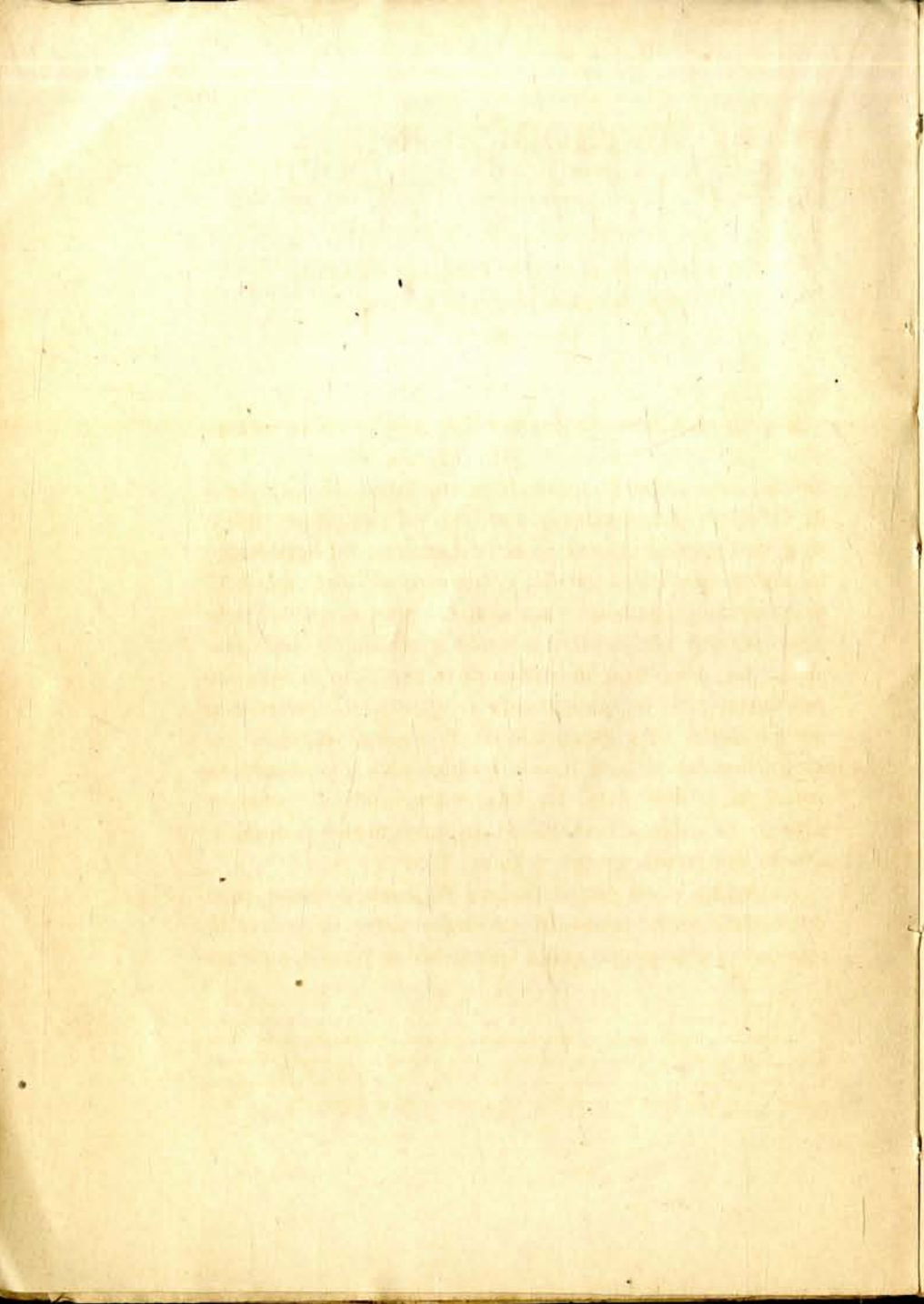
generale, all'importante pubblicazione del sig. VOIGT [1]. Per la parte storica sfruttai largamente il PRANTL [2], e per tutta l'opera, naturalmente, consultai gli insigni lavori del WUNDT, del BAIN, del MILL, del SIGWART, del LINDNER.... ecc., i quali lavori cito espressamente tutte le volte che ne fo uso.

In questa esposizione della logica moderna restano invariate tutte quelle parti della logica tradizionale le quali sono compatibili colla medesima; di modo che il libro - come quello del BAIN ove già sono introdotte alcune innovazioni, ma non quelle posteriori al BOOLE può servire di testo per le scuole secondarie, essendo svolte compiutamente e succintamente le dottrine indicate dal Programma Ministeriale ora vigente. Salvochè potranno essere omesse le osservazioni scritte in carattere più piccolo, e le note, che sono destinate per chi volesse addentrarsi nella materia, e che potranno servire agli alunni universitarî ed agli insegnanti. Con riguardo a tale scopo didattico aggiunsi in fine d'ogni capitolo un certo numero di esercizî e di problemi, che potranno essere assegnati come lavori di casa o venir svolti oralmente in iscuola.

Per non rendere il testo troppo voluminoso ho raccolto in altro libro, intitolato « Introduzione allo studio della logica moderna » tutto ciò che può servire a sostenere le dottrine esposte ed è critica delle teorie antecedenti, limitandomi nell'opera presente - salvo rare eccezioni - alla parte puramente espositiva e dichiarativa.

1) *Die Auflösung von Urtheilssysteme, das Eliminationsproblem und die Kriterien des Widerspruches in der Algebra der Logik.* Leipzig, Danz, 1890.

2) *Geschichte der Logik im Abendlande.* Leipzig, Hirzel 1855, 1870.

Prima di terminare mi sia permesso di ringraziare pubblicamente, l'egregio giovine, sig. GIUSEPPE PALLICCIA, studente di questo liceo, il quale con affettuosa premura e gentilezza mi volle costantemente assistere ed aiutare in tutto il faticoso lavoro occorrente alla compilazione ed alla pubblicazione di questo libro.

Velletri, giugno 1891.

INTRODUZIONE

§ 1. Definizione — § 2. Cómpito e direzioni
§ 3. Divisione e metodi di studio
della logica

§ 1. Non è cosa facile definire una scienza prima d'averla trattata; e perciò osserva giustamente il Mill che le definizioni le quali sogliono porsi in principio di un'opera, non possono dare che un'idea approssimativa dell'oggetto di cui si deve trattare. Ad ogni modo la logica (da λόγος, parola, come simbolo del pensiero) si occupa del pensiero; ma con ciò non è ancor definito, perchè anche altre scienze s'occupano del pensiero. La psicologia lo considera in rapporto al soggetto pensante: cioè in quanto esso è un'attività psichica o un prodotto, una esplicazione di questa attività. La metafisica ne indaga il valore ontologico e lo considera come parte del reale. La linguistica studia il pensiero umano in quanto esso viene rappresentato simbolicamente con segni grafici o fonici (parole) [1].

La logica però non considera il pensare come prodotto dell'essere pensante, nè come parte della realtà obbiettiva e neppure come significato di parole, sibbene

1) Storicamente la logica fu metafisica, linguistica indi psicologica (Aristotele..... Mill, Bain, Wundt) e sebbene, come vedremo appresso, abbisogni di queste scienze pei suoi fondamenti e dal confronto con esse ne scaturiscano luminosi risultati, pure va trattata come scienza a parte (Kant).

lo riguarda in sè, nel suo processo ordinato, nelle sue leggi. Nel pensiero così considerato giova distinguere due aspetti principali, cioè il contenuto (termine, materia) e la forma. Il contenuto è *ciò* che viene pensato, la forma è *come* lo si pensa. La logica s'occupa del pensiero come dev'essere [1]; esatto nella forma, vero nel contenuto.

§ 2. Questi due scopi: verità materiale ed esattezza formale non sempre furono nettamente proposti e perseguiti. Nei diversi tempi e dai varî cultori della logica fu rivolta l'attenzione preferentemente - talvolta esclusivamente - all'uno o all'altro; donde derivarono vedute e tendenze particolari di questa scienza, che diedero origine alle denominazioni di logica materiale (o metafisica) e di logica formale. Secondo la prima la logica è la scienza del pensiero, espressione della realtà e fonte di sapere [2]; secondo l'altra, essa è la scienza delle leggi formali del pensiero [3].

Però siccome nel pensiero forma e contenuto sono indissolubilmente congiunti, pur distinguendoli non si possono considerare come separati. Una logica completa li deve considerar tutt'e

1) Sulla relazione del pensiero logico *(quale dev'essere)* col pensiero psicologico *(qual'è)* cfr. Wundt, *Logik*, Stuttgart, Enke, 1880, I vol. pag 10-86, ed il bellissimo recente articolo del Döring *was ist Denken?* nel II fasc. del « Vierteljahrschrift für wissenschaftliche Philosophie » 1890. — Sembrami invece che debba rigettarsi la distinzione che talvolta vien fatta tra *pensiero in formazione* (oggetto della psicologia) e *pensiero formato* (oggetto della logica) e che si trova in vari trattati usati nelle scuole (credo, se non in isbaglio, nel Fiorentino), perchè tutti e due restano nella psicologia.

2) Se il pensiero ha da apportare scienza è necessario premettere una certa concordanza tra il pensare e l'essere. Il Wundt (op. cit. pag. 3-4) distingue pertanto tre gradi nella scuola materiale o metafisica:

I. Tra l'essere ed il pensiero v'ha soltanto un parallelismo (Aristotele, Schleiermacher, Trendelenburg, Ueberweg).

II. Una parte sola del pensiero *(l'intelligere* non *l'imaginari)* produce da sè il sapere (Razionalismo di Spinoza e Leibniz).

III. Havvi identità tra essere e pensare (Platone, Hegel).

Cfr. Ferri. *Della idea del vero e sua relazione coll' idea dell'essere.* (Mem. R. Acc. dei Lincei, 1887).

3) Kant, Herbart, Drobisch, Hamilton....

due: essa studia le forme del pensiero in quanto contengono reali contenuti. Forma senza contenuto non si dà; sibbene forma con un contenuto più o meno determinato.

§ 3. La parte della logica che considera la forma e non s'occupa del contenuto, che lascia indeterminato si dice *dottrina delle forme elementari,* e si chiama *dottrina delle forme sistematiche* o *metodologia,* quella che oltre la forma tien conto anche del contenuto (sempre indeterminato). Queste due parti formano la *logica pura, teoretica* o *formale* (in un senso più stretto), in quanto che studia le forme del pensiero e ne lascia indeterminato il contenuto, che può essere qualsivoglia, e perciò, come l'algebra, che rappresenta con simboli quantità qualunque, ha un carattere universale e normativo [1]).

La *logica applicata* (o *mista*), all'incontro, oltre che la forma, riguarda la verità materiale di determinati contenuti; e quindi ha un carattere pratico e speciale per le singole scienze, a cui s'applica. Essa forma un tutto con queste, come le applicazioni della matematica sono incorporate alla meccanica, alla fisica, all'astronomia. E pertanto considerandosi come scienza a parte non sarà trattata in questo compendio [2]).

1) Riferendosi a questo carattere universale può dire il MILL *(System of logic,* § 7. Introd.) la logica è un terreno neutrale nel quale possono incontrarsi ed operare concordemente i seguaci di HARTLEY e di REID, di LOCKE e di KANT.

Il carattere normativo per la pratica fa sì che venga ritenuta come scienza e come arte: « La logica è l'arte e la scienza del ragionamento » (WHATELEY), « la logica è la dottrina dell'arte del pensare -*Kunstlehre des Denkens* - » SIGWART. Ed anche il FACCIOLATI *(Jacobi Facciolati logicæ,* tom. I Protheoria I § 7): « *Dici potest scientia, quia est cognitio certa et evidens earum rerum, quæ ad disputandum per causas et rationes minime dubias comparata. Sed quia tendit non modo ad cognoscenda disputandi instrumenta, sed etiam ad efficienda, idcirco ars dici potest, et quidem ars scientiis obnoxia quia illis inservit.*

2) Però molti autori (fra i quali MILL, BAIN, WUNDT ....) aggiungono alla logica un'esposizione di queste applicazioni pratiche, sotto il nome di *metodo-*

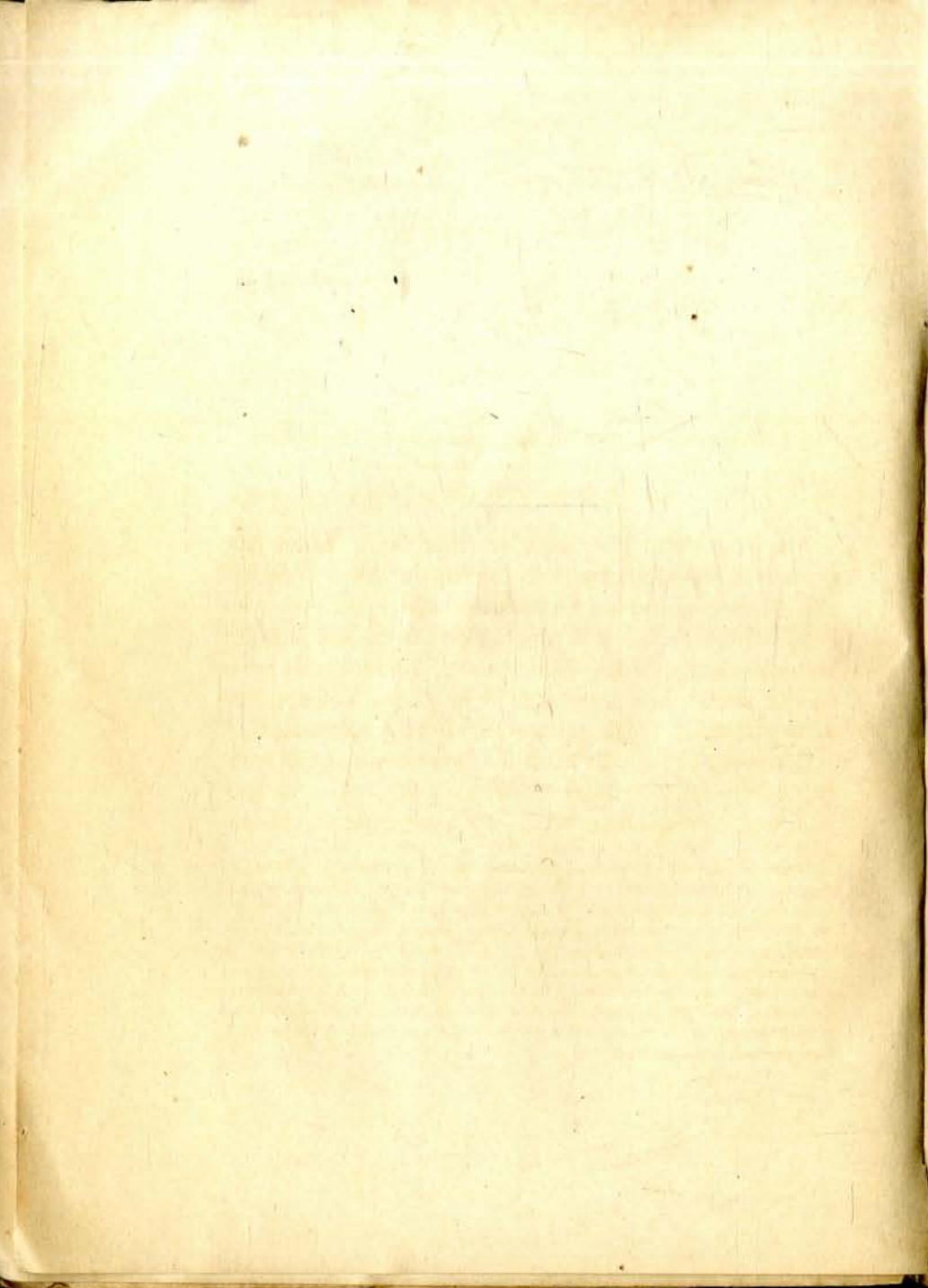
Sorge spontanea la domanda, quale dei due, la forma o il contenuto, va studiato pel primo? Per rispondere bisogna osservare che la forma del pensiero viene data dalla ragione, dall'attività intellettiva, mentre il contenuto viene dato dall'esperienza, dall'attività sensitiva [1]). Quindi chi considèra prima la forma e poi il contenuto, discende dall'intelligibile, dal pensare universale per concetti al sensibile, al pensare particolare per rappresentazioni: tale metodo è il *deduttivo* e la logica che lo segue si chiama logica deduttiva. All'opposto, chi considera prima il contenuto e poi la forma, ascende dal sensibile e dal pensare particolare per rappresentazioni all'intelligibile, al pensare universale per concetti; e questo metodo si dice *induttivo* e la logica che lo segue si dice logica *induttiva* [2]). Però è facile riconoscere che i due aspetti o momenti principali del pensiero (forma e contenuto) sono elementi irreduttì-

....

logia delle singole scienze. Ma non bisogna confondere questa *metodologia speciale* - parte della logica applicata - con la *metodologia* propriamente detta, o metodologia *generale*, la quale, considerando le forme sistematiche, valevoli universalmente per tutte le scienze, appartiene alla logica pura. Cfr. il mio articolo *sulla logica e i suoi progressi.* Riv. it. di filosofia, fasc. nov.-dic. 1891.

1) Kant. *Kritik der reinen Vernunft.*

2) La logica *induttiva* o *sperimentale* (ἐπαγωγή in Aristotele), sorse, contrapponendosi alla solita deduttiva (scolastica), di fatto di già col rinascimento italiano (Galileo). Bacone di Verulamio non può ritenersi come il fondatore teoretico della medesima: bensì appena i moderni (Mill, Apelt ecc.) che ne diedero i canoni. — La distinzione della logica, secondo la sua tendenza, in formale, materiale, induttiva, deduttiva, non viene sempre nettamente fatta. Ma *induttiva* con *materiale (sperimentale)* e, più di spesso, *formale* con *deduttiva*, come quelle che considerano anzitutto il contenuto, o, nel secondo caso, la forma, facilmente vengono tra loro scambiate. — Così è difficile dire un autore segue recisamente questa o quella scuola: e non essendovi rappresentanti puri delle medesime, queste denominazioni più che caratteri differenziali di un dato logico, valgono come tendenze o tipi generali, che si possono riscontrare, e ai quali i singoli logici si vanno più o meno accostando.

bili, cioè l'uno dall'altro non si può derivare. Laonde quando prenderemo in considerazione entrambi (nella *Dottrina delle forme sistematiche*), non avendo motivi di preferenza, dovremo studiare tanto la forma in rapporto al contenuto, quanto il contenuto in rapporto alla forma: cioè usare tutti e due i metodi, si induttivo che deduttivo.

PARTE I

Delle forme elementari

CAP. I

Teoria generale

§ 4. Definizione e classificazione delle forme elementari
§ 5. Metodo di pertrattarle: forme primitive e forme derivate.

§ 4. Si è detto che nella dottrina delle forme elementari si considerano quelle forme del pensare logico che si prestano ad un contenuto qualunque: esse vengono adoperate in ogni atto logico, tanto nel pensare ordinato (logico) della vita usuale, quanto nelle trattazioni scientifiche (dottrina delle forme sistematiche o metodologia). Quali sono queste forme elementari?

Il concetto, il giudizio ed il sillogismo; ai quali corrispondono gli elementi linguistici: la parola, la proposizione, il ragionamento [1]. In quest'ultimo, che co-

1) Per ora non si può dare una definizione rigorosa delle singole forme elementari (cfr. principio del § 1): e riservandoci di trattarne ai capitoli II, III e IV, bisogna accontentarsi della enumerazione e della nozione approssimativa che vien data nel testo e che si appoggia al linguaggio. Analogamente si potrebbe notare che psicologicamente alle suddette tre forme corrispondono: la rappresentazione, l'associazione semplice tra le rappresentazioni, e la composta (successione di associazioni: per il *post hoc*); metafisicamente: le sostanze (oggetti), le relazioni semplici (fatti: inerenze di proprietà alle cose; connessione di effetti a cause), le relazioni di relazioni (leggi: proprietà di proprietà di cose; effetti di effetti di cause).

stituisce per sè il tipo completo del pensiero logico, compariscono tutti gli elementi suddetti. Così dicendo:

« Tutti i pianeti hanno un moto rotatorio. »

« *Marte* è un pianeta; dunque *Marte* ha un moto rotatorio; »

formiamo un *sillogismo*. Le tre proposizioni:

« Tutti i pianeti hanno un moto rotatorio, »

« Marte è un pianeta, »

« Marte ha un moto rotatorio, »

esprimono altrettanti *giudizi;* nei quali si rinvengono i *concetti*, significati dalle parole « pianeta » « Marte » « cosa che ha moto rotatorio. »

§ 5. Queste forme non sono indipendenti una dall'altra: sibbene prendendo una come primitiva, le altre ci appaiono derivate da essa.

Dicendo che si possono derivare l'una dall'altra, non si dice che si derivino in modo eguale. La relazione che passa tra concetto e giudizio non è quella che corre tra giudizio e sillogismo. (cfr. § 17, osservazione). La natura del giudizio è determinata dallo studio delle *relazioni* fra i concetti, aggiungendo alcune verità assiomatiche (i così detti principî di identità, di contraddizione e del terzo escluso): mentre quella del sillogismo scaturisce dallo studio delle *operazioni* coi giudizî, a cui s'aggiunge il principio della ragion sufficiente. (Su questi principî vedi il capitolo V, di questa I parte). Denotando, come faremo in seguito, i concetti con simboli o espressioni letterali *a, b....* il giudizio verrà rappresentato dai segni della comparazione ($=$, $>$, $<$) fra queste espressioni, che danno origine alle equazioni o alle disuguaglianze logiche; mentre il sillogismo involverà il problema - analogo all'algebrico - della eliminazione dei simboli sovraccennati in un sistema di tali equazioni o diseguaglianze, o della risoluzione delle medesime.

Qual'è adunque la forma che deve prendersi come base per la costruzione della logica?

Considerando che una forma è in certo modo collegata con le rimanenti, parrebbe indifferente dare la preferenza all'una o all'altra. Diffatti nella storia della filosofia apparvero - e sonvi tuttora - sistemi di logica che cominciano dal concetto (Platone.. e la maggior parte dei trattati che s'usano nelle scuole), altre

che si fondano sul giudizio (ARISTOTELE, KANT), altre sul raziocinio (p. es. il GALLUPPI, poi JEVONS, PEIRCE ed altri della moderna scuola inglese).

Però, tenuto anche conto di quanto si disse nell'osservazione precedente, sembra che al sillogismo, benchè sia il tipo essenziale del pensiero logico, ragionato, non si debba attribuire il carattere della primitività con sicurezza di non andare errati. Tanto che il SIGWART (*Logik*, Freiburg i. B, Mohr., 1889, I vol.) non lo ritiene nemmeno come elemento. All'incontro per la scelta a fondamento del sistema logico, sonvi motivi egualmente potenti a favore tanto del giudizio che del concetto.

Noi prenderemo come elemento primitivo il concetto, ed avremo dalla nostra parte, se non altro, la semplicità di questo: a cui fa riscontro la primitività e semplicità della sensazione e della rappresentazione (e del vocabolo) confrontate con gli altri prodotti psicologici (e grammaticali). Il giudizio si dedurrà dalle relazioni ed il sillogismo dalle operazioni coi giudizî. [1])

Ci serviremo di simboli letterali per rappresentare le forme elementari: e precisamente di minuscole (o maiuscole) corsive per i concetti, e di minuscole greche per i giudizî. I segni per le relazioni e le operazioni con tali simboli si introdurranno rispettivamente ai §§ 7, 8.

Per la storia di questo simbolismo, che costituisce l'essenza del calcolo logico si può consultare: VENN, *Simbolic Logic*, London, Macmillan, 1881, nelle « Historic notes » al capitolo XX. — LIARD, *Les logiciens anglais contemporains*, 2a. ed. Paris, Germer Baillère, 1883: ed, in italiano, i miei: *Fondamenti del calcolo logico*, (estratto dal « Giornale di mat. » vol. XXVIII) Napoli, Pellerano, 1890 — pag. 1-2, 26-30, e l'articolo *sulla logica e i suoi progressi* citato.

---

1) All'incontro nelle logiche che pongon a base il giudizio: il concetto viene definito come il risultato di un giudizio compiuto (nozione avuta); e il sillogismo, come sopra, è dedotto dalle operazioni coi giudizi. Partendo dal sillogismo, il giudizio è il risultato di un sillogismo compiuto (fatto concluso) e — analogamente — il concetto quello di un giudizio compiuto.

Cap. II

Dottrina del concetto

---

§ 6. Definizione — § 7. Distinzione del concetto
§ 8. Relazioni ed operazioni coi concetti — § 9. Rappresentazione grafica — § 10. Categorie ed elementi
Esercizî e problemi

§ 6. Il « concetto [1]) » riguardandosi come punto di partenza, come primo dato dal quale la logica si sviluppa non potrà essere definito logicamente, ma la sua definizione dovrà prendersi da una qualunque delle altre scienze che s'occupano d'esso, trattando del pensiero. Pertanto si darà una definizione psicologica, una definizione metafisica ed una definizione linguistica del concetto; le quali potranno egualmente servirci per chiarirne il significato.

Psicologicamente si dà del concetto una definizione genetica: cioè si spiega com'esso si formi dalle nostre rappresentazioni.

La formazione psicologica dei concetti rientra completamente nella psicologia: ed è quindi trattata colà. Secondo le varie scuole di questa scienza, si dànno, naturalmente, diverse spiegazioni. Possiamo ricordarne quattro principali:

Il concetto non è altro che una solita rappresentazione particolare che prendiamo come tipo, come rappresentante di altre affini (Berkley, Wundt).

---

1) « idea » « nozione » e con riferimento alla espressione grammaticale « nome » « termine » *Lat.* « notio » « conceptus » « terminus » *Grec.* ὄνομα, εἶδος, νόημα, ἔννοια. *Ted.* « Begriff » *Ingl.* « term » « conception » *Franc.* « mot » « concept ».

Il concetto è una rappresentazione incompleta: è una parte della rappresentazione; cioè del gruppo di sensazioni elementari che la costituiscono, ne riproduciam soltanto alcune (SERGI, e alcuni positivisti).

La rappresentazione è un'idea incompleta: nella rappresentazione (mista di *essenza e non essenza*) apparisce l'idea (l'*essenza*) più o meno perfettamente (PLATONE).

Il concetto è il risultato di una nostra attività interna, unificatrice, che elabora le varie rappresentazioni, elidendo le diversità e rafforzando le somiglianze speciali (come nelle imagini sovrapposte delle fotografie multiple di GALTON), fondendole in una imagine tipica.

Metafisicamente, il concetto è ciò che corrisponde nella nostra mente ad un oggetto, considerato come reale ontologico. [1])

Linguisticamente, il concetto è il significato di una parola, che può essere soggetto di una proposizione (nome, termine). [2])

§ 7. Si usano fare varie distinzioni tra i concetti: alcune considerandoli per sè stessi (assolute), altre considerandoli uno rispetto all'altro (relative). Le prime considerando direttamente i concetti, nella loro propria essenza, dovranno appoggiarsi ad una delle scienze ausiliari della logica, che servirono a definirli: mentre le seconde potranno trattarsi logicamente.

Distinzioni assolute. Riportandoci alla definizione metafisica osserviamo che ad ogni oggetto corrisponde un concetto, ma non viceversa; ad un concetto può non corrispondere verun oggetto (allora la parola che

1) Non possiamo addentrarci in questa definizione: ed esaminare la giusta portata del vocabolo « oggetto, come reale ontologico » e la sua relazione con gli altri reali: sostanza, attributo, accidente ecc. Cfr. l'osservazione al § 10.

2) Analogamente alla nota precedente, non rispondiamo alla domanda se la parola significhi la rappresentazione psichica o l'oggetto ontologico, che le corrisponde. (MILL. *op. cit.* vol. I. lib. 1. Cap. 2. § 1).

lo esprime non ha alcun significato reale, è un puro *flatus vocis*). Quando ad un concetto corrisponde *un* oggetto (solo), il concetto si chiama *individuale* (singolare): p. es. « Aristotele » « questa speranza », « la più grande città del mondo » .... Quando ad un concetto corrispondono *più* oggetti, il concetto si dice *generico* (generale, universale) p. es. « pianta, » « virtù, » « città » ....

Il complesso dei singoli oggetti che possono corrispondere ad un concetto generico, si chiama la *classe* (di cose) pertinente a questo concetto. Così sono classi « tutte le singole piante prese insieme » « le singole virtù » « le singole città » ecc.

Adottando il nome di classe in senso lato, cioè come il correlativo ontologico del concetto, possiamo dire che ad ogni concetto corrisponde una classe: la quale abbraccia più oggetti, se il concetto è generico; si riduce ad un oggetto solo, se il concetto è individuale; e se il concetto è nullo, è una classe vuota, che non consta di verun oggetto.

Il concetto corrispondente a tutti gli oggetti di una classe presi insieme e considerati come un tutto, come un oggetto solo si dice *collettivo*. P. es. « esercito » « assemblea » « gioventù » ....

I nomi collettivi possonsi nuovamente distinguere in particolari e universali « essendovi più *nazioni* più *assemblee* . . . . questi nomi (collettivi) son anche nomi generali. Al contrario siccome non v' ha che un solo *universo*, questo termine collettivo è sempre individuale ». [1])

---

1) Bain. *Logique déductive et inductive*, trad. G. Compayrè, Paris, Germer-Bailliere, 1875. Vol. I p. 73.

In secondo luogo, l'oggetto o la classe degli oggetti, a cui il concetto si riferisce, può esistere da per sè (come sostanza), o pure soltanto essere in un altro oggetto (come sua proprietà, stato accidente....).

I concetti che si riferiscono a sostanze p. es. « pianta » « Londra » « popolo » .... si chiamano *concreti*, gli altri, p. es. « durezza », « bontà », « colore » .... si dicono *astratti*.

Combinando assieme le due divisioni, distinguonsi quattro specie di concetti:

1.° *concetto individuale concreto* p. es. « Socrate »
2.° *concetto individuale astratto* » » « il peso della Terra ».
3.° *concetto generico concreto* » » « pesce »
4.° *concetto generico astratto* » » « dolore »

Intorno ai concetti generici verte il celebre problema capitale della scolastica: che chiede se ad essi corrisponda un reale ontologico e di qual natura esso sia e come si comporti cogl'individui. [1]) Varie furono le opinioni, secondo il PRANTL [2])

....

1) Il problema avvertito di già da ARISTOTELE, è enunciato chiaramente da PORFIRIO (*Isag.* Cap. I): αὐτίκα περὶ γενῶν τε καὶ εἰδῶν, τὸ μὲν εἴτε ὑφεστῆκεν εἴτε ἐν μόναις φιλαῖς ἐπινοίαις κεῖται, εἴτε ὑφεστεκότα σώματά ἐστιν, ἢ ἀσώματα, καὶ Χωριστὰ ἢ ἐν τοῖς αἰσθητοῖς, καὶ περὶ ταῦτα ὑφεστῶτα, παραιτήσομαι λέγειν, βαθυτάτης οὔσης τῆς τοιαύτης πραγματείας καὶ ἄλλης μείζονος δεομένης ἐξετάσεως.

2) PRANTL, *Geschichte der Logik in Abendlande*, Leipzig, Heizel. vol II p. 118, distingue le opinioni seguenti:

1. di Roscellino, 2. d'Abelardo: « *universalia sunt sermones* », 3. di Iohannes di Salisbury » l'universale è l'*intellectus* o la *notio* ciceroniana. « 4. di Gualtiero di Montaigne: « gli universali sono essenzialmente congiunti cogli individui. Importa conoscere lo *status* nel quale si considera l'individuo ». 5. di Bernardo di Chartres: realismo platonico. 6. Gilberto di Portiers. « *formæ nativæ* » 7. di Gausleno di Soissons: « l'universalità consiste in un *colligere* ». 8. ipotesi delle « *maneries* ». 9. « Gli universali sono forme astratte come le

non meno di tredici, ma principalmente importanti quelle dei *nominalisti* e quelle dei *realisti*. I primi (ROSCELLINO) ritenevano i concetti generici come « *voces* », senza esistenza reale all'infuori del pensiero — come astrazioni mentali riferentisi ai singoli oggetti individuali e cavate da questi (« *universalia post rem* »). I secondi (GUGLIELMO DI CHAMPEUX) all' incontro affermavano la realtà sostanziale dei medesimi concetti generici, anteriore a quella degl'individui (« *universalia ante rem* »). Tra questi estremi sta ABELARDO, il quale colla formula « *universalia sunt in rebus* » affermò la coesistenza degli « universali » (corrispondente ontologico del concetto generico) come *essentia*, negli oggetti individuali *(existentia)*. Vedi l'importante articolo: *Il problema capitale della Scolastica* del Prof. F. BERTINARIA (Riv. it. di fil. 1889 luglio-agosto). —

Riferendoci alla definizione linguistica, osserviamo che le due suddette divisioni si riflettono anche nelle forme grammaticali *(nome proprio e nome comune, nome concreto e nome astratto)*. Alcuni filosofi inglesi (MILL, JEVONS . . . .) ne introducono - o sostengono - delle altre cioè di concetti *connotativi* e *non connotativi, univoci ed equivoci (polivoci), assoluti e relativi*... Però queste distinzioni a base linguistica, come quelle in concetti *oscuri* o *chiari, ordinati* o *confusi* (LEIBNIZ), a base psicologica, sono per la logica di poca o niuna importanza. Invece di importanza veramente vitale per la logica è la distinzione tra *individuo* e *genere*, e solamente questa: poichè su di essa si basa il fondamentale rapporto della subordinazione (Cfr. SCHRÖDER *op. cit.* p. 78). La relazione fra *astratto* e *generico* apparirà al § 10; quella fra termine *positivo* e *negativo* al § 8.

Distinzioni relative. Mentre il concetto considerato in sè doveva essere definito e distinto con elementi extralogicali, le *relazioni* dei concetti - cioè il concetto considerato in rapporto ad altri concetti - possono essere considerate da un lato puramente logico. Esse sono il primo fatto della logica, dal quale tutta questa deriva.

....

forme matematiche ». 10. « *ratio indifferentiæ* » 11. L'opinione di Guglielmo di Champeux. 12. quella (citata nel testo) di Abelardo, e 13. l'opinione dell'autore del libro « *de generibus et speciebus* » pubblicato dal COUSIN (come opera inedita d'Abelardo).

Le relazioni fondamentali tra i concetti (anzi, come si vedrà in seguito fra tutte le quantità logiche) sono tre: (1) *La subordinazione* (inclusione), (2) *la interferenza* (incrociamento, ovvero inclusione ed esclusione parziali), (3) *la disgiunzione* (esclusione totale).

Osserva giustamente il LINDNER [1]) che « la presupposizione più generale della logica è che un pensiero (concetto) sia contenuto in un altro... Se tutti i concetti fossero assolutamente differenti fra di loro, non vi sarebbe logica; il pensare — se pur così si potesse chiamare — consisterebbe nell'unire nella nostra mente questi concetti come i vocaboli d'un dizionario; il parlare stesso sarebbe soltanto l'espressione di singoli nomi senza costruzione. Tutte le operazioni logiche si fondano sulla somiglianza o sul contrasto « — espressioni che sono la nota prediminante in alcune logiche moderne [2]), e che si riferiscono appunto alla subordinazione od alla disgiunzione — » per cui due concetti sono compresi l'uno dell'altro, oppure si escludono a vicenda.

La subordinazione è quel rapporto che passa fra il concetto individuale di un oggetto e quello generico della classe che lo comprende: p. es. intercede tale rapporto fra il concetto « Socrate » ed il concetto « uomo ». « Socrate è un uomo ». « Socrate », il concetto individuale, si dice subordinato, contenuto dal concetto « uomo » che è il sovraordinato, il contenente. Uno o più concetti individuali, subordinati ad un medesimo concetto generico, formano *parte* di questo concetto, che ne è il *totale.* La parte è subordinata

1) LINDNER. *Logica formale*, trad. Erber. Zara, Woditzka, 1889, p. 4.

2) p. es. BAIN, *op. cit.* vol. I p. 5: la conoscenza avviene mediante l' associazioni di differenze e d'accordi (*rassemblance*, *agremeent*) di più sensazioni ». p. 7. « il potere di generalizzare consiste nel concepire le qualità comuni, gli accordi di più cognizioni particolari: « l'accordo è constatato dal nome comune » p. 11. « la legge intellettuale dell'accordo o della rassomiglianza è il principio del ragionamento ».... ecc.

al tutto. Pertanto lo stesso rapporto di subordinazione può correre tra due concetti generici, quando la classe pertinente ad uno può risguardarsi come parte (in senso collettivo come individuo) della classe pertinente all'altro; p. es. « greco » è subordinato ad « uomo »: « i greci sono uomini » « parte degli uomini sono greci ». Tal'è la subordinazione della specie al genere. Il concetto sovraordinato si dice essere *nota* del subordinato.

In generale si dice che un concetto a è subordinato ad un concetto b ogniqualvolta tutti gli individui (o le parti) della classe di a sono individui (o parti) della classe di b.

Il rapporto di subordinazione, che chiameremo I relazione, è di somma importanza per la logica, poichè tutte le altre relazioni (introdotta la nozione della negazione cfr. § 8 fine) ad esse si riducono.

L'eccellenza di questo rapporto, tradizionale nella logica, fu combattuta da alcuni recenti filosofi e specialmente dal WUNDT [1]), il quale pretende che vi sieno altre relazioni irreduttibili a questa forma. Però queste sedicenti relazioni irreduttibili sono piuttosto relazioni indeterminate od implicite, come giustamente osserva il VENN [2]). Pur mantenendo una distinzione fra il reale rapporto di *subordinazione*, che corre fra il concetto di un oggetto e quello della sua classe p. es. tra « giglio » e « fiore », e quell'altro rapporto, detto di *subsunzione* [3]), il quale intercede tra il concetto (concreto) di un oggetto e quello (astratto) di una sua qualità (proprietà, nota in senso stretto, attributo) p. es. tra

1) WUNDT, *Logik*, Stuttgart, Enke, 1880. I vol. p. 114 e seg. p. 124 e seg.

2) Proc. of the Cambridge philosophical Society. vol. IV, p. 40: « To these however Wundt adds some others which are not so much class relations as dependencies or implications ».

3) LOTZE, *Logik*, Leipzig, Hirzel. p. 48.

SIGWART, *Logik*, Tübingen, Laupp, 1873. I vol. p. 294.

« giglio » e « bianco »; quest'ultimo, — cioè la subsunzione — può convertirsi in una vera subordinazione (p. es. considerando il rapporto tra « giglio » e « cosa bianca »), mediante il cosidetto *spostamento categoriale,* di cui diremo al § 11.

Quando una parte soltanto di un concetto è subordinata ad un altro, diciamo che i due concetti stanno in interferenza o in II relazione fra di loro (inclusione parziale o esclusione parziale); p. es. « italiano » e « cattolico »: soltanto « parte » degli italiani sono cattolici, « alcuni » cattolici sono italiani.

a e *b* sono interferenti, quando alcuni individui (o parti dell'uno sono individui (o parti) dell'altro; ma altri no.

Quando nessuna parte di un concetto è subordinata ad un altro, si dice che i concetti sono fra di loro disgiunti, o in III relazione (esclusione totale) p. es. « minerale » e « pianta »: « nessuna » pianta è minerale; non v' ha alcun minerale che sia pianta.

a e *b* sono disgiunti, quando non v' ha alcun individuo (o parte) dell'uno che sia individuo (o parte) dell'altro.

Queste tre relazioni s'esprimono coi segni seguenti:

la I; $<$ (oppure $>$): $a < b$, « greco » $<$ « uomo » ($b > a$ « uomo » $>$ « greco »).
la II; *int.* : a *int.* b, « italiano » *int.* « cattolico »
la III;)(: a)(b « minerale »)(« pianta ».

È da notarsi che il segno della prima relazione, in generale, non è simmetrico. Il rapporto che passa tra

1) I segni della II e III relazione si devono al Wundt. Quello della I è molto più antico. Per comodità tipografica anzichè il segno del Wundt usiamo per la seconda relazione la sillaba *int.* (« interferenza »).

tra *a* e *b* in massima è diverso da quello che passa tra *b* ed *a,* quindi se *a* è subordinato a *b* la relazione

$$a < b$$

— che si può leggere, come nella matematica, *a minore di b,* intendendo per « minore » : « contenuto » « parte », « subordinato » — non è reciprocabile, cioè non posso scambiare *b* con *a* e lasciare inalterato il segno $>$, ma per esprimere la relazione che passa tra *b* ed *a,* devo scrivere

$$b > a$$

(*b maggiore di a,* cioè « contenente », « subordinante » *a*). Se « tutti i greci sono uomini » non è vero che « tutti gli uomini sono greci ». Alle volte però può darsi che sussistano contemporaneamente le disuguaglianze:

$$a < b \quad (b > a)$$
$$\text{e} \quad b < a \quad (a > b).$$

In tal caso si dice che tra *a* e *b* ha luogo la relazione di subordinazione reciproca o di identità, che si scrive

$$a = b \quad \text{ovvero } b = a$$

(*a eguale a b*)
p. es. « cloruro di sodio » = « sale da cucina », « la città più grande della terra » = « Londra » . . . .

Si vede che la copula « è » esprime ambiguamente subordinazione od identità, e quindi la possiamo esprimere col segno composto

$\leqq$ (« *minore od eguale* »)

e leggere $a \leqq b$ « *a* è *b* ». [1])

I segni della eguaglianza e quelli della II e III relazione sono simmetrici; cioè si possono lasciare immutati e scambiare i segni che denotano i concetti. Così se

a = b	sarà	b = a
a *int.* b		b *int.* a
a)(b		b)(a

Visto che, dati due concetti, *a* e *b*, la I relazione può avere le due forme $a < b$ oppure $a > b$; e considerando come una nuova relazione il caso dell'eguaglianza, alcuni [2]) distinguono cinque relazioni elementari, corrispondenti ai cinque segni, $<$, $>$, $=$, *int.*,)(, che sono diffatti tutte le relazioni possibili tra *a* e *b*. Ma relazioni veramente nuove non sono che le tre suaccennate, essendo

$$(a > b) = (b < a)$$
ed $$(a = b) = (a < b)\ (b < a)$$

Si vedrà in seguito, che si può fare a meno dei segni *int.* e)(: potendosi ogni relazione rappresentare coi simboli $<$ o $=$.

§ 8. Dato un concetto, *a*, si potrà trovare un concetto di esso maggiore, *b*, cioè tale sia

$$a < b\ ,$$

1) Schröder usa un segno speciale, composto dai due $<$ ed $=$; Peirce e gli americani $\prec$, Peano « ε »; *cfr.* Rivista di matematica, gennaio 1891 p. 9 nota 5; ed altri ancora De Morgan, Frège ecc.; cfr. quindi Venn *On the various notations adopted for expressing the common propositions of logic.* Proc. of the Cambridge Philosophical Society 1880 vol. IV p. 35-46.

2) Gergonne, *Essai de dialectique rationelle* (negli « Annales de mathématiques » da lui redatti. Tom. VII. p. 189-228,

oppure non lo si potrà trovare. In quest'ultimo caso *a* si dirà *massimo*. Nel caso che esista un tale *b*, *a* non sarà più un massimo, ma lo sarà *b* qualora non si trovi per avventura un altro concetto *c*, maggiore di *b*, e così via.

In generale, in una serie di concetti *a*, *b*, *c*, . . . *n*, l'uno maggiore dell'altro e disposti in modo che sia

$$a < b < c \ldots . < n,$$

l'ultimo, nel nostro caso *n*, cioè quello che è maggiore di tutti e, quindi, di nessuno minore, si dirà il concetto massimo tra quelli. P. es. dei concetti « Socrate » « Ateniese », « Greco », « Europeo », « uomo », dei quali ognuno è subordinato al seguente, « uomo » è il massimo.

Analogamente dato un concetto, *a*, tale che nessun altro concetto, *b*, siavi, di esso minore, si dirà *minimo*. E in generale in una serie di concetti *a*, *b*, *c*, . . . *m*, l'uno minore dell'altro e disposti in modo che sia:

$$a > b > c \ldots .. > m$$

l'ultimo, *m*, di tutti minore e quindi di nessuno maggiore si dirà il minimo di tali concetti. Nell'esempio precedente il concetto minimo sarebbe « Socrate ».

La classe maggiore di tutte le classi, quella che contiene tutti gli oggetti che si considerano, si chiama *campo del pensabile* (« *universe of discourse* ») e si segue con 1 [1]). La classe minore di ogni classe, è quella

1) Questo simbolo fu introdotto dal Boole. Alcuni sostituiscono al 1 il segno ∞, Grassmann; T, Peano: ●. Riguardo al suo significato nella logica, vedi Schröder *op. cit.* p. 211, segg.

esprimente il « *nulla* ». Essa è contenuta in ogni concetto, poichè questo contiene sè stesso e di più « nulla ». Essa si segna con *o* [1]). Quindi per le definizioni, dato un qualunque concetto *a* sarà

$$a \leqq 1 \quad e \quad a \geqq o$$

Intorno alle proprietà dell'*1* e dello *o* logico, confronta gli esercizî . . . . , che ne giustificano l'uso; in oltre vedi § 10, osservazione.

Si dice *somma* di due concetti, *a* e *b*, il minimo concetto che contiene sì *a* che *b*, e lo si denota con $a + b$, che si legge « *a più b* » oppure « *a* o *b* », ciò che è *a* ovvero *b* » [2]).

Si dice *prodotto* di due concetti, *a* e *b*, il massimo concetto contenuto sì da *a* che da *b*, e lo si denota con $a \times b$ oppure $a\,b$, che si legge « *a moltiplicato b* » oppure « *a che è b* » « *ciò che è tanto a che b* » [3]).

Date due concetti *a* e *b*, si cercano dei concetti c_k (k = 1, 2, 3 . . . n) tali che sia il seguente minore del precedente — cioè tali che sussiste sempre l'ineguaglianza.

$$c_k > c_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots n - 1)$$

....

1) Questo segno è adottato pressochè da tutti i logici. Cfr. SCHRÖDER, ibid.

2) Sonvi altre definizioni della somma logica. $a + b$ significa la classe che comprende tutti gli individui che appartengono alla classe *a* o alla classe *b* ». Specialmente importante è la definizione analitica data dal PEIRCE (op. cit. p. 33). La definizione, accennata dal PEANO (*Calcolo geometrico* p. 2) fu da me, resa rigorosa e data nei fondamenti (p. 9 segg. vedi anche il n. VII).

Il segno + ha molte analogie coll'eguale segno algebrico (vedi *esercizî* al § 8); ma ha anche proprietà speciali della logica, tanto che alcuni lo sostituiscono con altri segni.

3) Pel segno × valgono le medesime osservazioni fatte alla nota precedente.

e ciascuno maggiore sì di a che di b:

$$c_k > a \ , \ c_k > b \qquad (k = 1, 2, \dots n-1)$$

il minimo c_n della serie di questi concetti c_k sarà, per definizione, eguale alle somme $a + b$.

P. es. posto $a =$ « portoghese » $b =$ « spagnuolo », la serie dei c_k potrà essere:

« uomo » > « europeo » > « abitante della penisola iberica »; quindi « portoghese » + « spagnuolo » = « abitanti della penisola iberica ».

Analogamente per trovare i prodotti di a e b, si cercano dei concetti d_k tali che sieno l'uno maggiore del precedente — cioè

$$d_k < d_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \dots m-1)$$

e ciscuno minore sì di a che di b:

$$d_k < a \quad d_k < b \qquad (k = 1, 2 \dots m)$$

il massimo d_m della serie dei d_k, sarà per definizione eguale al prodotto $a\ b$.

Per es. posto a = « quadrilatero » b = « figura che ha i lati opposti paralleli » la serie dei d_k potrà essere

« quadrato » < « parallelogrammo rettangolo » < « parallelogrammo »; quindi « quadrilatero » × « che ha i lati opposti paralleli » = « parallelogrammo ».

Come si vede la somma ha per sue parti i sommandi, il prodotto è invece la parte comune a tutti i fattori.

La somma o il prodotto di due concetti può sempre ottenersi ed è un nuovo concetto; $a + b$ ed ab si diranno concetti composti (additivamente o moltiplicativamente, da a e da b, che si risguarderanno come relativamente semplici [1]).

Affinchè queste operazioni sieno eseguibili bisogna che esista, in ogni singolo caso, un minimo nella serie dei concetti (c_k) contenenti gli addendi — per la somma —; un massimo nella serie dei concetti (d_k) contenenti i fattori — per il prodotto —. Più sopra, *massimo* e *minimo* furono definiti, ma non ne fu dimostrata l'esistenza per tutti i casi, (talvolta forse non si potrebbe trovare alcuno di questi c_k o d_k; oppure la loro serie potrebbe essere infinita). Questa dimostrazione è possibile coll' introduzione dei segni *1* e *0*, che si chiamano pertanto rispettivamente *moduli* della somma e del prodotto; ed è data altrove. [2]) Poichè nel caso più sfavorevole per la somma v' è sempre il concetto (c_1) di tutto il pensabile (« *universe of discourse* », 1) che comprende certamente tutti gli addendi; nel caso più sfavorevole pel prodotto, cioè quando i fattori non hanno alcuna parte comune (III relazione) si dice che esso è eguale a zero (0), ossia che non esiste.

Analogamente si definisce e si trova la somma o il prodotto di più concetti (cfr. § 10).

1) Abbiamo detto relativamente semplici, perchè anche a e b possono supporsi sempre come composti di parti (nella loro sfera) o di note (nel loro contenuto). Concetti assolutamente semplici cioè tali che non constino nè di parti nè di note non si dànno. I concetti che non si possono più dividere in parti, i *minimi*, sono i concetti individuali — ma essi hanno un massimo contenuto. I concetti che non possono più dividersi in note sono le categorie — ma esse hanno una massima sfera. Cfr. § 10.

2) *Fondamenti* p. 10 seg.

La somma di tutte le parti di un concetto forma la sua *sfera* [1]) il prodotto di tutti i concetti di cui esso è parte, il *contenuto* [2]). In altri termini la sfera è la somma dei concetti minori, subordinati, degl'individui; il contenuto è il prodotto dei concetti maggiori, sovraordinati, delle note. Così la sfera di « uomo » è costituita da tutti i singoli uomini; ed è uguale, supponiamo, a « europeo » + « asiatico » + « americano » + « africano » + « australiano »: il contenuto è « ente ragionevole » « finito ».... ecc.

Sfera e contenuto stanno in iscambievole rapporto fra di loro, talchè le tre relazioni, menzionate al § precedente, corrispondono a determinati rapporti vuoi tra le sfere, vuoi tra i contenuti dei due concetti.

P. es. Se due concetti, *a* e *b*, stanno nella I relazione, così che sia

$$a < b$$

allora *a* sarà contenuto (come parte) nella sfera di *b:* e *b* sarà compreso (come nota) nel contenuto di a: « greco » è contenuto nella sfera di « uomo »; « uomo » è compreso nel contenuto di « greco ».

Appare che le relazioni tra due concetti si invertano, qualora si scambino i contenuti con le sfere. Ma non bisogna credere pertanto che contenuto e sfera sieno in semplice ragione inversa; se pure il contenuto cresca col diminuire della sfera e viceversa.

---

1) *Estensione*. Lat. *ambitus*. Grec. περιοχή. Ted. *Umfang*. Ingl. *denotation extent, quantity* (HAMILTON), *scope* (DE MORGAN), *aggregat*, Franc. *extension, étendue* ecc.

2) *Intensione, comprensione*. Lat. *complexus, summa*. Grec. συμπλοκή. Ted. *Inhalt*. Ingl. *connotation, intent, quality* (HAMILTON), *force* (DE MORGAN) *compound*. Franc. *compréhension* ecc.

Il DROBISCH [1]) crede che la grandezza della sfera diminuisca in ragione geometrica col crescere in progressione aritmetica della grandezza del contenuto. Però la loro vera connessione appare dai sistemi seguenti di relazioni, che le definiscono:

$$\begin{array}{lcl} a_k < b_1 & \qquad & a_1 < b_i \\ a_k < b_2 & & a_2 < b_i \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ a_k < b_n & & a_m < b_i \\ \hline \text{Contenuto di } a_k = \prod_{i=1}^{n} b_i & & \text{Sfera di } b_i = \sum_{k=1}^{m} a_k \end{array}$$

e manifestamente sfera e contenuto stanno fra di loro come i segni logici Σ e Π, che possono considerarsi come simboli di operazioni fra loro inverse [2]).

Chiamasi *negazione (opposto contraddittorio)* di un concetto *a*, la somma di tutti i concetti che stanno nella III relazione con *a*; e si denota coll'aggiungere una lineetta ad a : a_1, $\bar{a}$, a^1, $-a$, ... che si legge *non a*.

Quindi per definizione è

$$a + a_1 = 1$$

$$a\,a_1 = 0$$

1) DROBISCH, *Neue Darstellung der Logik*, Leipzig, Voss, 3. ed. p. 209.

2) *Fondamenti*, p. 35. — Su questo argomento si tratta anche alla Parte II Cap. II.

3) Cfr. SCHRÖDER op. cit. p. 303.

Si dimostra che per ogni a havvi un tale a_1 ed uno solo [2]. Inoltre è

$$(a_1)_1 = a.$$

Queste coppie di valori, a ed a, formano ciò che si dice il termine positivo ed il suo corrispondente negativo. Il negativo si forma di solito premettendo al termine positivo una delle particelle *in*, *a* (*an*), *s*, *ne*, *dis*,... p. es. « indicibile », « anormale, « sfavorevole », « nefasto » disarmonia ». Il negativo del negativo è il positivo. — « Se la lingua italiana fosse perfetta, ogni termine avrebbe un controtermine negativo che farebbe perfetto riscontro al positivo; in questo modo gli aggettivi e i nomi sarebbero sempre a coppie ». [1]) Se il termine è semplice (cioè consta di una sola parola) questo si può ottenere, adottando come sua negazione, il vocabolo formato col premettere la sillaba « non » al medesimo: p. es. « turchino », « *non*-turchino. » Però quando con un simbolo logico, p. es. a si intende un termine composto p. es. $b\ c + d$ [« italiani-cattolici » *o* « ecclesiastici »] la sua negazione, che logicamente si può dire semplicemente a_1, dovrà nel linguaggio essere espressa con un parafrasi, traducendo in parole il polinomio $(b_1 + c_1)\ d_1$ [« i laici (d_1) che non sono nè italiani nè cattolici »], che è appunto la negazione di $bc + d$ (Cfr. Esercizî al § 10).

Bisogna evitare accuratamente di ritenere per negazione di un concetto un suo semplice *contrario*, cioè un concetto disgiunto anzichè la somma di tutti i concetti disgiunti: p. es. « grande » come negativo di « piccolo » (mentre il vero opposto contraddittorio è « non piccolo » che contiene anche il « mezzano »). D'altra parte non bisogna estendere la somma dei disgiunti oltre il campo del pensabile dato: e così « non uomo » non significa « triangolo » « passione » « acido solforico ».... (LOTZE), ma « ogni altro animale fuorchè l'uomo » — ritenendo per « universe of discourse » il concetto animale ».

Adunque, come giustamente osserva il DE MORGAN, nella negazione bisogna por mente a tre cose distinte: al *totale* (campo del pensabile), che diviso in due parti, da i due membri

1) *Fondamenti*, p. 11.

2) JEVONS - *Logica* trad. Di Giorgio, Hoepli, Milano, 1878 (2. ed.) p. 17.

positivo e *negativo*. Fissati due di questi elementi, il terzo è pure dato ($a = 1 - a_1$; $1 = a + a_1$ etc. [1]).

Introdotto il segno per la negazione, possiamo esprimere tutte le relazioni col segno della subordinazione: giacchè la III relazione, a)(b può ridursi alla I: $a < b_1$ — oppure $b < a_1$, da b)(a — « ciò che non è b, è compreso in *non b;* e la II relazione a *int.* b può ridursi nelle due
$a_m < b$, $a_n < b$, — dove a_m ed a_n sono parti di a.

§ 9. Per rappresentare graficamente i concetti e le loro relazioni si adoperano alcune figure geometriche, dette *simboli euleriani* [2]), cioè i concetti, considerati, in riguardo alla loro estensione (sfera), si designano con circoli (projezioni nelle loro sfere nel piano). La subordinazione (I relazione) appare come la inclusione (del minore nel maggiore), la interferenza (II relazione) come la intersezione, la disgiunzione (III relazione) come la esclusione reciproca di questi circoli (vedi figg. 1, 2, 3).

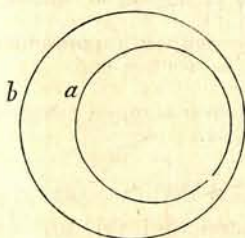
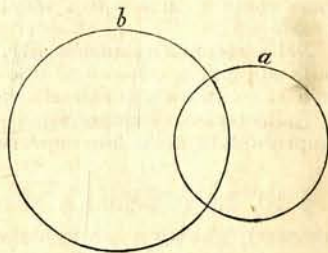



fig. 1 fig. 2

1) Intorno alla *sottrazione logica* vedi: *Fondamenti* p. 9 e segg.

2) Vedi le mie note *Sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche* (Rend. della R. Accademia dei Lincei. vol. VI p. 50-55, 373-378). — In oltre:

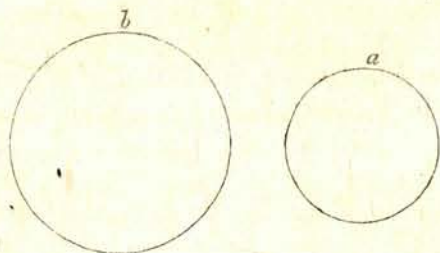



fig. 3

Il campo del pensabile è rappresentato da tutto il piano *(lavagna)* dove può essere segnato un concetto. La somma di due concetti è rappresentata dalla superficie occupata dai due circoli corrispondenti: il prodotto della porzione del piano comune ai due circoli. La negazione di un concetto è rappresentata da tutta la superficie esterna alla figura euleriana che lo significa: è quello che resta del piano, tolta tale figura.

Si vede nella prima relazione (fig. 1) che il prodotto ab (la parte comune ad a e b) s'identifica con a, mentre la somma è uguale a b.

Nella seconda relazione (fig. 2), il prodotto è rappresentato dalla superficie comune ai due cerchi; la somma dalla superficie contenuta dalle due circonferenze.

Nella terza relazione (fig. 3) il prodotto è zero, la somma è rappresentata dalle due superficie circolari.

§ 10. Le relazioni e le operazioni definite per due concetti, possono naturalmente estendersi ad un numero qualsiasi di concetti. Avremo così gruppi di re-

....

VENS *On tha employment of geometrical diagrams for thesensible representation of logical propositions.* (Proc. Cambridge phil. Soc. vol. IV p: 47-59.

lazioni coesistenti, prodotti di più fattori, somma di più addendi:

Ad esempio tre concetti possono trovarsi simultaneamente in queste relazioni:

a $<$ b (I)	a $<$ b (I)	a $<$ (I)	a *int.* b (II)
b $<$ c (I)	b)(c (II)	b *int.* (II)	b *int.* c (II)
a $<$ c (I)	a $<$ c (I)	a *int.* (II)	a)(c (III) ecc.

Le relazioni fra più concetti si studieranno al § 16, trattandosi della teoria del giudizio.

La somma $a + b + c$ è la minima classe contenente a, b, c; il prodotto abc la massima classe contenuta in a, b, c.

$a(b + c)$ è evidentemente, la massima classe contenuta in a, e in $b + c$; e così via. (Vedi *esercizî*).

In generale date diversi concetti a, b, c. . . , si possono eseguire quante operazioni logiche si vuole tra di essi: e quindi si ottiene un polinomio, che può sempre interpretarsi logicamente e che è un nuovo concetto. Questo polinomio si dice *funzione* delle quantità a, b, c. . . , intendendo con questo vocabolo, come nelle matematiche, una qualunque espressione che contiene le quantità a, b, c. . . . , congiunte additivamente o moltiplicativamente fra loro o con le rispettive negazioni.

Così dati *n* concetti possiamo formare il concetto composto che ha essi *n* concetti quali note, per suo contenuto. È questo concetto il prodotto degli *n* concetti. Analogamente possiamo formare il concetto composto che ha essi *n* concetti quali parti della sua sfera. È questo concetto la somma degli *n* concetti.

In forza della legge di dualità (§ 25, fine) per la quale ad ogni proposizione circa la somma corrisponde un'altra circa il prodotto (cfr. la correlazione tra sfera e contenuto), che si può dalla prima immediatamente derivare, e vice versa; basta studiare ora i prodotti di più fattori e non occorre rilevare espressamente le somme di più addendi, che ai suddetti prodotti dualmente corrispondono.

Dei concetti *a, ab, abc* .... che si ottengono con la successiva moltiplicazione degli n concetti fra di loro, è ciascuno maggiore — o al più eguale — del susseguente (cfr. esercizî al § 8). L'ultimo concetto

$$x = abcdef \ldots$$

a cui si perviene, si dice determinato (o definito, vedi §§ 28, 29) dai concetti a, b, c .... che sono note del suo contenuto. Il processo col quale ad esso si arriva — cioè la moltiplicazione di *a* per *b*, per *c* ecc. — dicesi determinazione, p. es. « nave » « nave a vapore » « nave a vapore da guerra » ..... « Il Re d'Italia ».

La disposizione delle note nel contenuto e quindi l'ordine dei fattori nella determinazione è logicamente indifferente pel concetto definito, poichè

$$abc = acb = bca \text{ etc. (vedi esercizî al § 8)},$$

« uomo europeo alto di statura vecchio » è lo stesso che « vecchio europeo, uomo alto di statura » ecc. Però di fatto noi mettiamo dinanzi alle altre le note così dette essenziali, cioè quelle che si riferiscono alla sostanza, alle qualità principali dell'oggetto a cui il concetto corrisponde: prima i nomi, poi gli aggettivi ed altri complementi: così diciamo « una rosa rossa côlta nel giardino » e non « un oggetto colto nel giardino, di

colore rosso, che è una rosa ». Ma logicamente le due dizioni esprimono la stessa cosa, quindi sono concetti identici; la loro diversità è d'indole puramente psicologica, fissandosi più specialmente la nostra attenzione e, quindi, dandosi maggiore rilievo alla rappresentazione che comparisce per la prima.

Le note non essenziali, che si riferiscono a qualità accidentali, a modi della sostanza, si chiamano secondarie.

Ma la distinzione di note essenziali e secondarie, come quelle di note relative ed assolute, che si trovano nelle vecchie logiche, sono quindi di carattere affatto psicologico, ontologico o linguistico. Logicamente tutti i concetti per sè, hanno eguale importanza, e confrontati fra loro non possono stare che in una delle tre relazioni già notate.

Il processo opposto della determinazione, si chiama la generalizzazione e corrisponde ad una divisione lo gica [1]).

Dato un concetto

$$x = abcdef \dots$$

colla generalizzazione (divisione successiva per i singoli fattori), si astraggono successivamente le note *f, e, d* .... e si ottengono i concetti

$$abcde, \quad abcd, \quad abc \dots$$

1) Le operazioni inverse della sommazione e della moltiplicazione logica non sono sempre eseguibili nè univoche; potendo esser p. es.

$$a + c = b + c \quad (\text{od} \quad ac = bc)$$

senza che sia $a = b$. Cfr. la legge d'assorbimento Esercizio 17 al § 8. Però in casi speciali si può definirlo (p. es. la sottrazione $a - b$ quando sia $a > b$. (Vedi *Fondamenti* p. 9 segg.) ed è ad ogni modo

$$(a + b) - b = a \quad \text{ed} \quad ab : b = a.$$

Cfr. Schröder *op. cit.* p. 478 segg.

dei quali ciascuno è maggiore — o al meno eguale — al seguente, e che si dicono generalizzazioni di x. P. es. « nave a vapore da guerra corazzata » « nave a vapore da guerra » « nave a vapore »....

Questo procedimento per le note *f, e, d* che vengono tolte si chiama astrazione. « Corazzata » « da guerra » « a vapore » sono le note astratte.

Le due operazioni del determinare e dell'astrarre non possono essere proseguite all'infinito, ma hanno un certo limite. Cioè si danno certi concetti

$$x = abcdef$$

che coll'aggiunta di altre note (p. es. *g*) non vengono determinati maggiormente; o in altri termini, non si da un altro concetto, *g*, tale che sia

$$xg < x.$$

Questi sono i concetti individuali, che stanno con ciascun altro concetto o in III o in I relazione (come subordinati): Il prodotto xg è eguale a zero o ad x secondo che avviene il primo o il secondo caso. P. es.

x = la città più popolosa d'Italia (Napoli)

se prendo

g = « marittima » sarà

$xg = x$ (I relazione)

se prendo

g = « posta sull'Adriatico » sarà

$xg = 0$ (III relazione)

È dimostrato [1]) che prendendo un numero sufficiente di note si può pervenire — o avvicinarsi quanto più ci piace — ad un dato concetto individuale; come pure è dimostrato, che soltanto con un concetto individuale può arrestarsi la determinazione.

I concetti individuali pertanto sono i minimi concetti, oltre i quali non è che lo zero e corrispondono in certo modo alle quantità evanescenti o differenziali dell'analisi.

Parimenti si danno certi concetti *a* tali che non possono essere maggiormente generalizzati, cioè non possono essere rappresentati come prodotti di due altri concetti, e quindi nessuna altra nota, diversa da *a* stesso, può venire da essi astratta.

Questi sono i concetti più universali chiamati dai logici categorie. P. es. « sostanza ».

Essi sono i concetti massimi, oltre i quali non v'è che tutto il pensabile, (l'1) e sono analoghi ai numeri primi che non hanno altro divisore che sè stessi, e l'unità.

Come si vede il 0, l'1, l'individuo e le categorie sono definiti logicamente solo in relazione ad altri concetti (di cui essi sono certo minimi o massimi); la ricerca di una definizione assoluta dei medesimi, cioè quali siano di fatto, per sè stessi, conduce a questioni di natura metafisica (che talvolta s'appoggiano anche alle altre scienze ausiliarie della logica).

Così le dieci categorie enumerate da Aristotele (οὐσία,

1) *Fondamenti*, p. 13-17.

ποσόν, ποιόν, πρὸςτί, ποῦ, ποτέ, κεῖσθαι, ἔχειν, ποιεῖν, πάσχειν) e comprese nei due barbari versetti:

Arbor sex servos ardore refrigeral ustos
ruri cras stabo, sed tunicatus ero.,

vennero successivamente ridotte a sette:

mens mensura quies motus positura figura
crassaque materies dederunt exordia rebus;

dagli stoici a quattro: ὑποκείμενον (sostanza), ποιόν (qualità) πῶςἔχον (proprietà, modificamento determinato) πρὸς τι πώς εχον (relazione, modificamento relativo): così da Galeno (*Therap. mat.* I. 4, X 129 seg.): οὐσία, ἐνέργεια, πάθημα, διάθεσις, che riunisce anche le tre ultime in una: συμβεβηκός — a meno che non si voglia ritenere più tosto quanto dice lo scolio David *ad cat.* 6. Brand. Schol. 49 a. 29 — che ne dà cinque, cioè οὐσία, ποσόν, ποιόν, πρόςτί, πρός τι πῶς ἔχον. Cfr. Prantl *Geschichte d. Logik* I. p. 564 nota 85). Questa divisione degli stoici concorda con quelle di Cartesio e Spinoza, che distinguono le quattro categorie di *substantia, attributum, modus, accidens:* così pure i moderni logici tedeschi (Wundt I. p. 103. Lotze p. 17. Sigwart I. p. 28) enumerano i quattro gruppi:

Gegenstandsbegriff, Eigenschaftsbegriff, Zustandsbegriff, Beziehungsbgriff.

ai quali vengono ricondotte le categorie aristoteliche nel modo seguente: I. οὐσία (a cui corrisponde il sostantivo) II. ποιόν, ποσόν (aggettivi, numerali ed avverbi da essi derivati), III. κεῖσθαι ἔχειν, ποιεῖν, πάσχειν (verbi), IV. ποῦ, ποτέ, πρόςτι (avverbi di luogo e di tempo, preposizioni, suffissi dei casi, tempi e modi verbali) Cfr. Trendelenburg *Geschichte der Kategorienlehre. Hist. Beiträge zur Philosophie,* I. p. 23 e segg. — che ne propugna l'origine grammaticale: « *Die Kategorien sind die aus der Anflösung des Satzes entstandenen Elemente* » contro di che Zeller *Philosophie der Grichen* 3. ed. II, 2 p. 264) John Locke ne sostiene tre: *sostanza, modo, relazione;* che furono anche ristrette alle due sole: *sostanza* e *modo* (secondo Simpl. *ad Categ.* f. 15. E.: οἱ γάρ περὶ Ξ ενοκράτην καὶ Ἀνδρόνικον πάντα τῷ καθ᾽αὑτὸ καὶ τῷ πρός τι περιλαμβάνειν δοκοῦσιν, ὥστι περιττὸν εἶναι κατ᾽ αὐτοῦς τοσοῦτον τῶν γενῶν πλῆθος. — di già ac-

cennate dall'accademico SENOCRATE, come καθ'αὑτὸ e πρός τι (relazione).

Ci sarebbe ancora la divisione delle 12 categorie di KANT, di cui parleremo al § 12, le quali si riferiscono più specialmente alle forme del giudizio anzichè a quelle del concetto: e poi altre le quali pure non sempre al concetto risguardano, e quindi non sono i generi universali dei predicabili (κατηγορίαι o γένη τῶν κατηγορημάτων cioè *summa praedicabilia*, o *praedicamenta* da κατηγορεῖν « *praedicari* »).

Sembra accettabile — ed è press'a poco accettato dalla maggior dei filosofi — la distinzione degli stoici, alla quale corrisponde la distinzione dei concetti in concreti ed astratti: riferendosi ai primi la categoria di sostanze, ai secondi quella di relazione e qualità [essenziale od attributo, e qualità non essenziale, proprietà o modo] che anche, pur distinguendoli, in una sola categoria (sia essa relazione πρόςτι, o accidente συμβεβηκός) si possono comprendere. Volendo per altro semplificare sempre più questa divisione, si finisce coll'astrarre (a mezzo della divisione logica), anche l'ultimo fattore caratteristico della categoria e si arriva all' « *universe of discourse* », all' 1, come il concetto veramente più universale: come fa il LINDNER, (*logica formale*, trad. Erber. Zara 1882, p. 21) che osserva: « in senso stretto non c'è che una sola categoria, cioè il concetto più universale dell'Ente ». Però non conviene confondere le categorie con questo concetto più universale; « nell'astrazione dobbiamo fermarci sul penultimo gradino. » Egualmente controverso fu questo concetto più universale, rappresentato dall'1. L'ὄν degli stoici, l'« ens » degli scolastici fu sostituito dall' « *etwas* » — qualche cosa — di KANT. (*Logik*, Werke ed. Rosenkranz, v. III p. 274): ma con ciò, come osserva giustamente il WUNDT (*Logik*, I p. 102) si hanno di mira soltanto gli oggetti concreti (« *Objectsbegriffe* »), escludendo il « niente » (UEBERWEG, *Logik*, 4. ed. p. 117). La classe logica più vasta è sicuramente il « pensabile » (das « *denkbare* » LOTZE, *Logik*, p. 53), qualora non si ritenga questa espressione per una mera tantologia, pari al dire che il concetto più vasto è il concetto del concetto. All'1 fu ancora attribuito il significato di « possibile » « vero » ecc.; avendo con ciò speciale riguardo all'uso di questo simbolo nella teoria del giudizio. Ad ogni modo ritenendo per tutti questi simboli le definizioni relative e strettamente logiche non temeremo di andare erranti.

L'1, l'universe of discourse, è semplicemente la somma di tutti i concetti che entrano nelle cerchie determinate delle nostre considerazioni: p. es. trattandosi di suoni, l'universe of discourse sarà la somma di tutti i singoli suoni, che formano la sfera del concetto generale di suono: per i numeri sarà il con-

cetto generale di quantità e così via. Analogamente per le categorie: e tali sarebbero acutezze e intensità per il suono, positivo, negativo: intero, frazionario; razionale, irrazionale ecc. per il numero.

A questa definizione relativa dell'*uno* è legata quella della negazione di un concetto: che appunto non è altro che il concetto complementare dell'unità. Così tenendo per « universe of discourse » i colori, « non rosso » non vorrà dire tutto il pensabile meno il rosso, tutto ciò che non è rosso: ma soltanto il complesso dei colori che non sono il rosso. Cfr. Wundt. *Logik.* p. 120 » nella negazione vi è sempre una tacita presupposizione che il concetto negativo ed il positivo, di cui è negazione sieno contenuti in un medesimo concetto generale (che è l'« *universe of discourse* » del caso nostro).....

Con queste definizioni, concorda quella della eguaglianza relativa o parziale: due quantità si dicono eguali, quando, in una determinata ricerca si può porre una al posto dell'altra. Nel far ciò badiamo soltanto che i due concetti abbiano comuni le proprietà essenziali, quelle cioè che cadono nel « universe of discourse » relativo a quella considerazione, e si trascurano le altre tale è p. es. l'eguaglianza giuridica degli uomini, quella dei pezzi di ricambio nelle macchine, l'eguaglianza di due toni musicali (benchè suonati da diversi strumenti) ecc. [1])

L'analogia di questa astrazione con l'intersezione geometrica, nella rappresentazione grafica: come pure quella del così detto spostamento categoriale — che anche con la suesposta relatività delle definizioni concorda (e di cui parleremo al § 14), colla proiezione, può desumersi dai *Fondamenti* p. 25-26.

Esercizî e problemi. Al § 7.

1) Dare esempî di concetti individuali e di concetti generici;

2) enumerare degli oggetti pertinenti alla classe di un dato concetto generico;

3) Dare esempî di nomi collettivi; distinguerli in generici e singolari.

4) Dare esempî di concetti concreti e di concetti astratti, distinguere fra questi gl'individuali dai generici.

5) Che specie di concetti sono: *Roma, mare adriatico, povertà, ferro, popolo, giovine, giovinezza, gioventù, macchina a vapore, « Duilio », forza la più bella casa della città, il grado di calore del centro della terra, sale, la grande Armada, codesto uomo, l'amore di Dante per Beatrice, la flora alpina?*

---

1) Peano. *Calcolo Geometrico.* Torino, Bocca, 1888, p. 153.

6) Quali di questi presentano ambiguità di senso? quali sono le classi corrispondenti a quelli che sono generici?

7) Dare esempî di concetti che stanno nella I relazione (subordinazione); in essi, qual'è il subordinato e quale è il sovraordinato?

8) Dare esempî di concetti che sono in II relazione (interferenza).

9) Dare esempî di concetti che sono in III relazione (esclusione).

10) Invertire la relazione. Esempî di equipollenza.

11) Che rapporto intercede tra: *Russo* ed *europeo*, *arte* e *musica*, *numero pari — numero divisibile per due*, *fenomeno fisico — fenomeno chimico*, *proletario — pagante imposta*, *ricco — nobile?*

Al § 8. 12) Dare esempi di massimi, e di minimi.

13) di somma e di prodotti logici.

14) Dimostrare che

$$ab \leqq a \qquad \Big| \qquad a + b \geqq a$$ [1].

[Diffatti non può essere $ab > a$, nè ab *int.* a oppure ab)(a — perchè? — Analogamente per $a + b \geqq a$].

Se $\qquad c > a \quad | \quad a < c$

è $\qquad ac = a \quad | \quad a + c = c \qquad$ (cfr. § 9 oss.)

Si dimostri [ricorrendo alle definizioni del prodotto e della somma].

16) Dimostrare [coll'aiuto del precedente teorema] che

$a.a = a \quad | \quad a + a = a \qquad$ (*Legge di identità o di tantologia*).

---

1) Le espressioni separate da una linea verticale si corrispondono dualmente. cfr. § 10, e § 25 *fine*.

Quindi in generale che

$$\Pi\, a = a \quad | \quad \Sigma\, a = a.$$

17) Dimostrare che

$$a(a + b) = a \quad | \quad a + ab = a$$ *(Legge d'assorbimento).*

[Si usino i teoremi 14) 15) 16)].

18) Verificare le identità seguenti:

I $ab = ba$	$a + b = b + a$ *(Legge di commutazione)*
II $a(bc) = (ab)c = abc$	$a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c$ *(Legge di associazione)*
III $a(b + c) = ab + ac$	$a + bc = (a + b)(a + c)$ *(Legge di distribuzione).*

19) Se $a = b$, e $c = d$

$$ac = bd \quad | \quad a + c = b + d$$

— ma non vice versa! —.

20) Dare esempi di applicazioni pratiche dei teoremi 14)-19).
21) Dimostrare che

$$oa = o \qquad 1 + a = 1$$
$$o + a = a \qquad 1.a = a$$

[coll'aiuto del teorema: qualunque sia a, egli è

$$a \leqq o \quad | \quad a \leqq 1].$$

22) Se

$$ab = 1 \quad | \quad a + b = o$$

egli è

$$a = 1 \quad e \quad b = 1 \qquad | \qquad a = o \quad e \quad b = o \ldots$$

Si dimostri.

23) Egli è

$$(ab)_1 = a_1 + b_1 \qquad | \qquad (a + b)_1 = a_1 b_1 .$$

Si dimostri.

24) $$(o)_1 = 1 \qquad | \qquad (1)_1 = o$$

25) Si esprimono con subordinazioni gli esempi dei n[i] 8) 9) 11).

Al § 9. 26) Con un concetto a il campo del pensabile è diviso in due parti disgiunte a ed a_1

$$\text{(essendo} \quad aa_1 = o \qquad | \qquad a + a_1 = 1).$$

Dati due concetti a e b e le loro negazioni a_1 e b_1 il campo del pensabile è diviso in quattro parti: ab, ab_1, ab, $a_1 b$ e $a_1 b_1$ fra loro disgiunte.

Essendo.

$$\begin{aligned}(ab)(ab_1) &= aa.bb_1 = a.bb_1 = \\ &= a.o = o\end{aligned}$$

ed analogamente

$$\begin{aligned}(ab)(a_1 b) &= (ab)(a_1 b_1) = \\ (a_1 b)(a_1 b_1) &= (a_1 b)(ab_1) \\ &= (ab_1)(a_1 b_1) = o\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1 &= \\ a(b + b_1) + a_1 (b + b_1) & \\ = (a + a_1)(b + b_1) & \\ = 1.1 = 1 &\end{aligned}$$

Le formule $a + a_1 = 1$, $ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1 = 1 \ldots$ si dicono sviluppi dell'unità (1) per uno, due ..... argomenti (a b ....). I singoli membri (prodotti) a , a_1 , e rispettivamente ab , ab_1 , $a_1 b$, $a_1 b_1$ si dicono costituenti.

Dati n argomenti a b c d .... l'1 è diviso in 2^n costituenti, corrispondenti ai singoli prodotti che si ottengono con la moltiplicazione d'ogni argomento più la sua negazione per ciascuno degli altri più la sua rispettiva negazione: cioè corrispondenti ai membri dello sviluppo dell'espressione

$$(a + a_1)(b + b_1)(c + c_1)(d + d_1) \ldots = 1.$$

Quanti e quali costituenti (parti disgiunte dell'1) si hanno, essendo dati tre, quattro concetti?

27) Qualora a e b sieno in II relazione, tutti i quattro prodotti ab , ab_1 , $a_1 b$, $a_1 b_1$ esistono cioè sono maggiori di zero.

Che avviene di ciascuno dei medesimi se $a > b$, se $a < b$, e se $a = b$? (I relazione).

Che avviene se a è in III relazione con b?

28) Rappresentare graficamente il caso in cui tutti i prodotti (costituenti) possibili; di tre dati concetti a b c (e loro negazioni), sieno diversi da zero.

È da notarsi che il medesimo caso rispetto a quattro concetti a b c d non può essere rappresentato coi simboli euleriani. Vedi la mia *nota sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche* inserita nel VI volume dei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei p. 53 e 578.

29) Illustrare con diagrammi circolari i teoremi e problemi precedenti.

30) Dare esempi pratici dei nn. 23) 26) e 27).

Al § 10. 31) Coll'aiuto dei teoremi precedenti si dimostri che:

I. $(a + b)(a_1 + b_1) = ab_1 + a_1 b$

II. $(a + b c_1)(b + a_1 c_1) = ab$

III. $a(b + c) + c_1 + ab + a_1 b_1 = a + b_1 + c_1$

(Schröder).

32) Si eseguiscano le operazioni [usando i teoremi 16) 17) 18) 26)]:

$$[ab\,(c + b_1 c) + d]\,[b_1\,(ce_1 + d_1) + a\,(c\,e_1 + d_1)] = \dots$$

$$ab\,(a + b_1)\,[\,(a + b + b_1)\,(a + c + b_1)\,(a_1 + c_1 + b_1) + (a_1 + b_1 + c_1\,(a)_1 + b + c)\,] = \dots.$$

33) Si eseguiscano le seguenti negazioni [usando i teoremi 23) 24) 26)]:

$$(a + bc)_1 = \dots.\ [= a_1 \times (bc)_1 = \dots.]$$

$$[\,(ac + bc_1)\,d\,]_1 = \dots.$$

$$[\,(a + b)\,(a_1 + c) + (a + b_1)\,ab\,]_1 = \dots.$$

34) $[a + b + c]_1 = a_1 b_1 c_1$

$[\,(a + b)\,(c + d)\,]_1 = a_1 b_1 + c_1 d_1$ (De Morgan)

35) Se $a = b$ è $a\,b_1 + a_1\,b = o$ e viceversa.

Per dimostrarlo si adopera il teorema 22) (a destra).

36) Tre persone *A*, *B*, *C* sono intente a ricercare dei libri in un negozio. A cerca tutte le opere storiche italiane e le novelle straniere legate; B opere storiche legate e novelle italiane, purchè non abbiano carattere storico. C infine ricerca tutte le opere italiane legate e le novelle storiche non legate. Quali libri sono ricercati assieme da due persone: e sonvi opere che lo sieno da tutti e tre?

[Ponendo a = « italiano », b = « storico », c = « legato »,

d = « novella », ed indicando con A, B, C le opere ricercate dalle rispettive persone, si ottiene:

$$AB = bc\ (a + d)\ ,\ AC = ab\ (c + d)\ ,\ BC = ac\ (b + d)$$

$$ABC = abc] \qquad (\text{Venn}).$$ [1]

37) Dare esempî di *determinazioni*.

38) Formare dagli esempî del n.° precedente, la serie dei concetti generalizzati e quella dei concetti astratti.

39) Si disse che una espressione logica nella quale c'entra il simbolo a, chiamasi funzione di a. La si denoti con f (a). In virtù dei teoremi 16) e 26), eseguendo le operazioni che vi sono in f (a), codesta f (a) si potrà porre nella forma

$$(1) \dots . f(a) = Aa + Ba_1 + C,$$

dove A, B, C non contengono a nè a_1 [all'uopo basta raccogliere in uno tutti i termini che contengono a come fattore, e quindi estrarre a quel fattore comune; e si ha Aa. Analogamente per Ba_1. Termini che contengono a ed a_1 non si dànno (teor. 26). In C stanno tutti i teoremi che non contengono nè a nè a_1]. **Moltiplicando ambi i membri dell'eguaglianze per $a + a_1$ si ha:**

$$(a + a_1)\ f(a) = Aa\ (a + a_1) + Ba_1\ (a + a_1) + C\ (a + a_1)$$

$$1.\ f(a) = Aa + Ba_1 + C\ (a + a_1)$$

$$(2) \dots . f(a) = (A + C)\ a + (B + C)\ a_1$$

Ponendo ora nella (1) $a = 1$ e quindi $a_1 = o$ si ha

1) Cfr. Schröder *op. cit.* p. 392.

$$f(1) = A.1 + B.o + C$$

$$= A + C ,$$

ed analogamente

$$f(o) = B + C$$

Quindi

$$(3) \ldots \; f(a) = f(1) \, . \, a + f(o) \, . \, a_1$$

dove f(1) e f(o) sono ciò che diviene f(a) qualora si sostituisca rispettivamente 1 e o per a. La formola (3) si dice sviluppo della f(a) per l'argomento *a*. (Boole).
Analogamente per più argomenti:

$$(4) \ldots \; f(a, b) = f(1, b) \, a + f(o, b) \, a_1 \qquad \text{per la (3);}$$

considerando la f(a, b) come funzione di *a*. E quindi, sviluppando per *b*:

$$f(1, b) = f(1, 1) \, b + f(1, o) \, b_1$$

$$f(o, b) = f(o, 1) \, b + f(o, o) \, b_1 \, .$$

Sostituendo questi valori nella (4) si ha:

$$(5) \ldots \; f(a, b) = f(1, 1) \, ab + f(1, o) \, ab_1$$

$$+ f(o, 1) \, a_1 b + f(o,o) \, a_1 b_1$$

Si trovi lo sviluppo di f(a, b, c) .... ed il termine generale per lo sviluppo di f(a, b, c .... n).

Si vede che « ogni espressione contenente a, b, c . . . . . può porsi in forma di una somma ove ogni singolo addendo consta di un costituente dello sviluppo dell'*I* per a, b, c . . . (vedi 26) — moltiplicato per un fattore indipendente da a, b, c. . . . . , eguale al valore che assume l'espressione data, qualora nella medesima si pongano tanti 1 per i simboli positivi e tanti 0 per i simboli negativi, che compariscono nel costituente ».

40) I fattori dei costituenti nello sviluppo di una funzione, di dicono *coefficienti*. Tali sarebbe in 3): f (1) e f (0); in 5) f (1,1), f (1,0). . . . ecc. Questi coefficienti, che non contengono gli argomenti, possono contenere altri concetti, che c'entrano nell'espressione data. Però se la espressione data fu sviluppata per tutti i simboli che contiene, p. es. se la funzione

$$f(ab) = f(1,1)\ ab + f(1,0)\ ab_1 + (0,1)\ a_1 b + f(1,1)\ a_1 b_1 \,.$$

è *solamente* funzione di a e b, allora i coefficienti f(1,1), f(1,0)... non potranno contenere che 1 e 0; e quindi, pei teoremi 21) e 24) dovranno essi medesimi essere eguali o ad 1 o a 0. Se sono tutti eguali ad 1, allora la funzione si riduce allo sviluppo dell'1 per i due argomenti *a* e *b*. Altrimenti, se alcuni scompaiono altri no la funzione avrà la forma di una somma di varî costituenti a b, $a\ b_1$ . . . . , cioè sarà eguale ad una somma disgiunta [e incompleta]:

$$\Sigma\ ab$$

dove gli a e b potranno o no avere l'indice della negazione.

Analogamente per più argomenti.

Così $a + bc_1$ che è funzione dei soli singoli a b c si riduce alla somma disgiunta

$$abc + abc_1 + ab_1 c + ab_1 c_1 + a_1 bc$$

[all'uopo basta moltiplicare l'espressione di sopra per $(a + a_1)$ $(b + b_1)\ (c + c_1)$].

41) « Per ridurre una espressione a somma disgiunta, basti moltiplicare ciascun addendo per lo sviluppo dell' 1 per gli argomenti che non entrano in questo addendo, e quindi fare le debite semplificazioni ».

II) « La negazione di una somma disgiunta è eguale alla somma disgiunta complementare per lo sviluppo dell'1 ».

P. es. $(abc + ab_1c_1 + a_1bc_1) = abc_1 + ab_1c + a_1b_1c + a_1bc_1 + a_1b_1c_1$.

42) I) Quali persone possono intervenire in una festa data da una società, che invitò i proprî socî e i militari?

[si tratta di mettere in forma di somma disgiunta « socio » + « militare »].

II) Ridurre a somme disgiunte le espressioni 31) III, 32) 33) 36); e le loro negazioni.

Cap. III

Dottrina del giudizio

---

§ 11. Definizione del giudizio — § 12. Distinzioni § 13. Relazioni dei giudizî — § 14. Operazioni coi giudizî Giudizî composti — § 16. Problema di Jevons e Clifford

§ 11. Il giudizio [1]) è l'espressione delle relazioni dei concetti. Se esprime una relazione fra due concetti il giudizio è semplice; se esprime una relazione fra più

1) « enunciato », « enunciazione », « asserzione » e con riguardo all'espressione grammaticale « proposizione ». Lat. « judicium » « proloquium » (Varrone) « effatum » « pronuntiatum » (Cicerone) Greco ἀπόφανσις (Aristotele) συμπλοκὴ ὀνομάτων (Platone. *Theaet.* 202) ἀξίωμα (stoici), πρότασις. Ingl. « judgment », « statement ». Franc. « proposition ». Ted. « Urtheil » « Aussage ».

concetti, multiplo. In tutti e due i casi si dirà anche elementare, esprimendo *una* relazione. Se esprime più relazioni, si dice giudizio composto o complesso di giudizî elementari.

Questa definizione del giudizio è strettamente logica: poichè tale è la relazione dei concetti. La espressione poi è di solito la parola; ma anche, svincolandosi dalle restrizioni linguistiche, può essere diretta, qual'è quella simbolica già usata, o la rappresentazione grafica.

Le dottrine che prendono il giudizio, anzi che il concetto, come forma primitiva devono darne una definizione extra-logica. La definizione degli associazionisti è psicologica, derivandolo dall'associazione delle rappresentazioni: è pure psicologica quella del WUNDT [1]) che lo spiega colla « decomposizione di una rappresentazione complessa nelle sue parti similari ». La definizione aristotelica [2]) del giudizio quale « λόγος ἀποφαντικός (*dictum enunciativum*), il quale può essere vero o falso », è d'indole grammaticale. È anche di natura metafisica, avendosi riguardo della realtà oggettiva, quale criterio della verità o della falsità dell'asserto [3]). Un'altra definizione linguistica è quella del MILL [4]): « il giudizio è una enunciazione, nella quale un concetto viene affermato o negato (quale predicato) ad un altro. HERBART [5]) pone come essenziale la distinzione fra soggetto (rappresentazione prima) e predicato (rappresentazione seconda) — contro quanto diremo al § 12 — « nel giudizio si uniscono due concetti, dei quali uno vièn posto pel primo, e l'altro segue a quello ». TRENDELENBURG [6]) e SCHLEIERMACHER [7]) danno definizioni metafisiche, dicendo che « il giudizio è una forma del pensiero che risponde all'unione reale delle cose « (cfr. i passi d'Aristotele più su citati). Similmente l'UEBERWEG [8]): « l'essenza del giudizio sta nella consapevolezza della validità oggettiva di una unione soggettiva di rappresentazioni ».

1) WUNDT *op. cit.* I p. 137.

2) ARIST. de enunc. 4: ἔστι δὲ λόγος ἅπας μὲν σημαντικός.... ἀποφαντικὸς δὲ οὐ πᾶς, ἀλλ᾽ ἐν ᾧ τὸ ἀληθεύειν ἢ ψεύδεσθαι ὑπάρχει.

3) ARIST. *metaph.* v. 10: ὥςτε ἀληθεύει μὲν ὁ τὸ διῃρημένον οἰόμενος διῃρῆσθαι καὶ τὸ συγκείμενον συγκεῖσθαι, ἔψευσται δὲ ὁ ἐναντίως ἔχων ἢ τὰ πράγματα.

4) MILL. op. cit. I p. 19 — 5) HERBART, *Logik*, « Werke » vol I p. 92.

6) TRENDELENBURG. *Logische Untersuchungen.* 2. ed. II vol. p. 210.

7) SCHLEIERMACHER. *Dialektik*, § 190 seg.

8) UEBERWEG. *Logik.* 4. ed. p. 154.

Potendosi ogni relazione fra i concetti ridurre alla subordinazione (§ 8, fine); ogni giudizio semplice avrà la forma

$$a < b,$$

o al più

$$a = b$$

quando la subordinazione è reciproca: e si lèggerà « *a* è *b* ».

Talvolta la riduzione di un giudizio alla subordinazione può presentare alcune difficoltà — e bisogna ricorrere al così detto *spostamento categoriale* (*Kategoriale Verschiebung*. WUNDT). Ecco in che consiste: Per la relatività delle definizioni logiche (§ 10, osservazione) noi possiamo confrontare fra di loro ed operare solamente con concetti che sono sottoposti al medesimo 1. Tali concetti, la cui somma dà appunto il determinato campo del pensabile, chiameremo omogenei. P. es. dato come 1, il concetto generico « colore », io saprò che sia « rosso », non « rosso » etc., potrò confrontare un colore con un altro e così via. Oppure dato come campo pel pensabile il concetto di « sostanza », potrò confrontare qualunque « cosa » con un' altra. Però se prendo due concetti pertinenti a diversi campi del pensabile, non li potrò direttamente confrontare tra di loro — si avrà al più una *subsunzione* ma non una subordinazione. — Per far ciò bisognerà che introduca un nuovo 1, che comprenda i due campi del pensabile dati, cioè sia non minore della loro somma. Allora gli 1 di prima diverranno categorie soggette ad un medesimo (nuovo) 1: e il confronto sarà possibile, trasportando un oggetto da una categoria all' altra. P. es. i concetti « giglio » e « bianco » non posso confrontare tra loro perchè uno è una « sostanza », l'altra è una « relazione » (« stato »). Ma spostando quest'ultima categoria in quella sostanza avrò il concetto « oggetto bianco » e la subordinazione « giglio » < « oggetto bianco ».

Questa conversione dei concetti astratti nei corrispondenti concreti è molto raccomandata dal BAIN, e se ne daranno esempî negli esercizî.

Con uno spostamento inverso si ottiene la subordinazione:

« colore del giglio » < « bianco »

Sul modo di rappresentare tutti i giudizî mediante subsunzioni, tratta lo SCHRÖDER [1]).

Ogni giudizio semplice si potrà servire

$$a \leqq b.$$

Il concetto *a,* minore o al più eguale a *b,* si chiama *soggetto;* [2]) il concetto *b,* maggiore o al meno eguale ad *a,* si chiama *predicato;* [3]); il segno $\leqq$. che esprime appunto l'essere minore o al più eguale, e che si legge « è », si chiama *copula.* [4]) Soggetto e predicato si dicono *termini* del giudizio o della proposizione.

Naturalmente in quei giudizî in cui il predicato è verbale, copula e predicato sono uniti in uno; p. es. « Ciro regna »; ma si può staccare il verbo *essere* dal predicato: « Ciro è re » (WUNDT). In modo analogo un giudizio della forma

« A è » (cioè « *vi è A* » « *A esiste* »), « A non è » (« *non esiste* »), non manca di predicato, bensì la copula funge per esso. E si può scrivere.

$$0 < A$$

oppure, nel secondo caso,

$$A = 0$$

Questi giudizî si dicono esistenziali, ed esprimono pure una relazione tra due concetti, uno dato esplicitamente, *A,* l'altro

1) SCHRÖDER op. cit. p. 141-155.

2) Intorno al vario significato del vocabolo « soggetto » (ὑποκείμενον) nella filosofia, vedi TRENDELENBURG. *Elementa logices aristoteleæ.* Berlino Bethge 1845 (3. ed.) § 1.

3) κατηγόρημα, κατηγορούμενον da κατηγορεῖσθαι τί τινος, predicare, attribuire checchè a checchessia.

4) Cfr. WUNDT p. 143 e segg.; però, secondo la nostra definizione, le sue osservazioni non sono accettabili.

dato implicitamente per le definizioni del capitolo precedente, cioè il 0, o l'1.

Dato un concetto A sono possibili le seguenti relazioni tra esso e lo zero o l'unità:

$$1)\ A > 0 \qquad\qquad 3)\ A < 1$$
$$2)\ A = 0 \qquad\qquad 4)\ A = 1$$

(Le altre combinazioni sono assurde, per le definizioni dell'1 e dello 0).

Però siccome la 3) e la 4) si possono scrivere anche

$$3)\ \underset{1\quad 1}{A} > 0$$

$$4)\ \underset{1\quad 1}{A} = 0$$

si vede che le due relazioni

$$1)\ A > 0$$
$$2)\ A = 0$$

sono le sole due forme essenzialmente diverse di giudizî esistenziali.

La nomenclatura di soggetto e predicato, comune alla grammatica, ha origine dalla legge psicologica del nostro pensiero, per la quale con ogni singolo atto della mente non possiamo cogliere che *una* relazione fra due rappresentazioni: non possiamo formare che un giudizio semplice alla volta. Le due rappresentazioni che consideriamo sono appunto quelle che denominiamo soggetto e predicato. Il soggetto, *a*, è la prima che ci apparisce nella nostra coscienza, dalla quale partendo perveniamo alla seconda, *b*, — il predicato, — che si considera come derivato dalla prima, come riferito od attribuito ad essa. Il prodotto del giudizio è una determinazione, un concetto composto, *ab*, « *a che è b* », risultato del giudizio compiuto « *a è b* ». Pertanto alcuni logici (KANT, LOTZE, DROBISCH, HAMILTON) considerano il giudizio come l'espressione dell'unione di due concetti. Altri, all'incontro, (WUNDT . . . . .) sostengono che il giudizio non unisca ma separi i concetti (donde il nome tedesco « Ur-theil » « separazione primitiva »); avvegnachè dicendo « *a è b* » si riconosce che *a* contiene in sè la nota *b*, e così dicendo la si distingue da esso: in altri termini sostengono che

nella nostra coscienza il soggetto ci si presenta come una rappresentazione complessa, dalla quale, a mezzo del giudizio, viene analiticamente segregato il predicato. « *ab* » non è il risultato del giudizio « *a è b* », sibbene questo di quello. Ma il decidere tra queste opinioni disparate è affare di psicologia. — Dal lato linguistico si può pure parlare di unione o disunione di concetti: a seconda che il giudizio è affermativo — κατάφασις — o, come dicono alcuni logici, se alla domanda se si possono unire i concetti si risponde con un *si* (LINDNER), oppure è negativo — ἀπόφασις, se si risponde con un *no:* e c'entra un *non* (*in—, a—* ecc.) sia nel predicato, sia nella copula od anche nel soggetto. Basandosi sulla corrispondenza che passa tra l'idea e l'oggetto corrispondente si può anche parlare di separazione od unione dei due termini, in quanto esse si riferiscono a separazioni od unioni esistenti di fatto tra gli oggetti (vedi il passo già citato d'ARISTOTELE).

Ma non tenendo conto delle rappresentazioni psicologiche, delle parole, degli oggetti ontologici, sibbene delle pure relazioni dei concetti, la distinzione di unione o disunione fra essi ci è indifferente. Non che con ciò si voglia dire che unione o disunione non possono aver luogo: ma è chiaro che una relazione data può risguardarsi rispettivamente tanto come unione che come disunione. P. es. se *a* e *b*, sono in prima relazione, esprimendo questa unisco *a* e *b*, disunisco *a* da *b* [1] (che sono in III). L'unione e la disunione hanno a che fare colla *espressione*, ma non con la *relazione* che è la base del giudizio e della quale esso è espressione.

I termini del giudizio (*a, b*) non sono (sempre) identici ai concetti (poniamo *A, B*) della relazione dei quali esso giudizio è l'espressione. Ma se i due concetti dati, *A* e *B,* stanno fra di loro nella II o nella III relazione, il rapporto di subordinazione non correrà tra *A* e *B,* bensì, per la II relazione, tra una parte di A — che denoteremo con *vA*, ove naturalmente *v*

....

1) Il giudizio esistenziale fu introdotto nella logica da EUDEMO: Εὔδημος δὲ ἐν τῷ πρώτῳ περὶ Λέξεως δείκνυσι διὰ πλειόνων ὅτι τὸ ἔστιν ἐν ταῖς ἁπλαῖς προτάσεσι κατηγορεῖται καὶ ὅρος ἐστίν, οἷον Σωκράτης ἔστι, Σωκράτης οὐκ ἔστι. (*Schol, cod. Par.* 6, BRANDIS 146, a, 19).

non può essere nè eguale nè maggiore di A, dovendo essere $vA < A$; per tanto, *a fortiori*, sarà anche $v < 1$ — e B: per la III tra A e B_1.

Così che per le tre relazioni la forma generale del giudizio sarà rispettivamente:

$$\begin{array}{lll} \text{I} & A < B & \\ \text{II} & vA < B & \text{oppure } wA < B_1 \\ \text{III} & A < B_1 & \end{array}$$

Riducendole tutte alla forma

$$a < b$$

cioè alla forma di *soggetto*, copula, *predicato*, si vede che il soggetto (a) ed il predicato (b) sono (solamente) certe funzioni dei concetti A e B: poniamo

$$a = \varphi(A) \qquad b = \psi(B)$$

I concetti A e B si chiamano *materia* del giudizio, le funzioni φ e ψ ne costituiscono la *forma*. Così « I corpi sono decomponibili » ed « alcuni corpi sono indecomponibili » hanno eguale materia, forma diversa. « Tutti gli uomini sono mortali » e « tutte le mezze lire sono (ora) monete d'argento » hanno eguale forma, diversa materia.

§ 12. Distinguiamo i giudizi anzi tutto per la loro forma. Le subordinazioni:

$$\begin{array}{lll} 1) & A < B & \text{(per la I relazione)} \\ 2) & A < B_1 & \text{(per la III relazione)} \end{array}$$

hanno di comune il soggetto *a*, che in tutt'e due casi è l'intero concetto *A*, tutto *A*. I giudizî che hanno la proprietà di avere il soggetto eguale a tutto un concetto di quelli di cui si esprime la relazione si dicono *universali*.

All'incontro il giudizio

$$3) \ \mathrm{v}\,A < B$$

che esprime la subordinazione a B di una parte di A; oppure quello

$$4) \ \mathrm{w}\,A < B_1$$

che esprime la subordinazione a B_1 dell'altra parte di A, riferentisi tanto l'uno quanto l'altro alla II relazione, hanno di comune la forma del soggetto *a*, che nei due casi è sempre soltanto una parte del concetto *A*. I giudizi che hanno la proprietà di avere per soggetto una parte di un concetto di quelli di cui si esprime la relazione si dicono *particolari*.

I giudizî 1) e 3) hanno in comune il concetto *B*. per predicato, e si dicono *affermativi*. I giudizi 2) e 4) hanno comune il predicato B_1, che è la negazione di uno dei concetti di cui si esprime la relazione, e si chiamano *negativi*.

Un giudizio universale e positivo, del tipo 1), si denota con *a*, uno del tipo 2), cioè universale e nega-

tivo, con *e;* Un giudizio particolare e positivo (tipo 3), con *i*, uno particolare e negativo (tipo 4) con *o* [1]).

Sarà pertanto ogni giudizio della forma

« tutti gli A sono B » un giudizio *a*,

« tutti gli A sono non B » un giudizio *e*,

« alcuni A sono B » un giudizio *i*,

« alcuni A sono non B » un giudizio *o*.

Si vede che tale distinzione si basa sul fatto che nella subordinazione tipica

$$a < b$$

cioè

$$\varphi (A) < \psi (B)$$

tanto φ che ψ possono avere due valori $\left[\varphi = \left\{ {A \atop vA} \right., \psi = \left\{ {B \atop B} \right. \right]$.
1

Il valore della φ determina la *quantità* del giudizio, e per questa il *soggetto* è *universale* o *particolare;* il valore della ψ determina la *qualità* del giudizio, e per questa il *predicato* è *affermativo* o *negativo*. [2]).

....

1) Queste lettere, tratte dalle parole latine « *a i* o » « n *e* g *o* », compariscono per la prima volta, nel libro, probabilmente apocrifo, *de Dogmate Platonis.*

La relazione scambievole tra questi giudizi apparirà al § 14. Al § 16 si ridurranno a due forme soltanto.

2). ARISTOTELE chiama il giudizio affermativo κατάφασις, il negativo ἀπόφασις (da non confondersi con ἀπόφανσις o λόγος ἀποφαντικός, che vale giudizio in generale). Questi vocaboli furono voltati in latino da PLAUTO: « aientia » e « negantia », da MARCIANO CAPELLA « dedicativus » ed « abdicativus » ed appena da BOEZIO, coi nomi attuali: « affirmatio » e « negatio » — Pel

Bisogna distinguere accuratamente questi « giudizî negativi », nei quali si afferma una subordinazione tra a e B_1, con la « negazione di un giudizio » (vedi § 14). Ogni giudizio negativo va risguardato come « predicante negativamente » *negatio prädizirende*. Wundt), il segno della negazione si applica al predicato — benchè nella dizione possa preporsi alla copula — p. es.

« nessun corpo è eterno »

oppure

« tutti i corpi *non* sono eterni »

equivale a

« tutti i corpi sono *non*-eterni »

ed ha la forma

$$A < B_1 .$$

Mentre colla negazione od opposto contradditorio di un giudizio neghiamo che la subordinazione espressa dal giudizio dato, esista. Essa ha la forma

$$(a < b)_1$$

oppure

$$\alpha_1$$

denotando tutta la proposizione $a < b$, con α. Il segno della negazione si riferisce alla relazione, a tutto il giudizio. Così esso equivale al detto:

....

giudizio universale si ha la parola καθόλου o καθ᾽ἕκαστον, pel particolare κατὰ μέρος o ἐν μέρει: In luogo di « universale »; s'usa ancora l'espressione « totale », « distributivo » ovvero « pieno », in luogo di « particolare », « parziale » « non distributivo », « vago ». Vedi Jevons, op. cit. p. 45-48 Bain, op. cit. I. p. 121 seg. De Morgan *Sillabus*, London, Walton et Maberly, 1860. p. 60.

« la proposizione $a < b$ è negata, è falsa »;

oppure

« vale l'asserzione α_1, opposta all'asserzione $a < b$ ».

Con questa distinzione è tolta di mezzo la lunga controversia circa i giudizî negativi, se, cioè, la negazione si debba riferire alla copula od al predicato [1]). Bisogna pure porre attenzione al significato del giudizio particolare. La parte (vA), gli « alcuni » vanno intesi sul senso di « non ogni » « non tutti » ($vA < A$) — forse « nessuno » —. Mentre nella definizione moderna, basata sulle quantità non evanescenti, che si darà al § 16, gli « alcuni » significheranno « non nessuno » « *non nulli* » — forse « tutti » —. A questi due significati corrispondono le due diverse notazioni:

$$va < b$$

nel primo senso, e

$$ab > o$$

(« sonvi alcuni a che sono b ») nel secondo [2]).

De Morgan [3]), ammettendo la qualificazione (la funzione ψ) anche pel soggetto, introdusse altre quattro specie di giudizî, che si ottengono ponendo nelle formole di sopra A_1 in luogo di

---

1) Vedi Schröder, *op. cit.* p. 319-338. Stanno decisamente dalla parte del torto il Lotze, (op. cit. p. 61 seg.) ed il Bain (op. cit. I. p. 121, nota), che non vogliono riconoscere il giudizio negativo, come predicante negativamente, ed il Sigwart, che crede riferirsi alla copula e non ha tutto il giudizio, la negazione di questo.

2) Di più si dirà al § 16. Molti logici, fra i quali alcun moderno italiano, errarono per aver confuso questi due diversi significati del particolare.

3) De Morgan. *On the structure of the syllogism*. Trans. of the Cambridge phil. Society. 1846, vol. VIII. p. 381.

A. Hamilton [1]) ammise la quantificazione del predicato, così che — da Halstedt [2]) — furono introdotti altri 8 giudizî, ponendo wB e wB_1 in luogo di B e B_1 —. L'esposizione completa dei giudizî elementari tra due concetti sarà data pure al § 16.

Però oltre questa distinzione dei giudizî, moltissime altre furono fatte.

Il Kant, sotto il nome di categorie del giudizio, porta le seguenti dodici:

1. Per la qualità	2. per la qualità
Universali	Affermativi
Particolari	Negativi
Individuali	Infiniti
3. per la relazione	4. per la modalità
Categorici	Problematici
Ipotetici	Assertorî
Disgiuntivi	Apodittici.

I giudizî individuali, nei quali il soggetto è un individuo, possono risguardarsi come giudizî universali, perchè la relazione espressa si riferisce a *tutto* l'individuo — appunto perchè indecomponibile in parti — vedi però § 23, fine, del Capitolo V.

1) Riducendo i giudizi alle 8 eguaglianze:

$$
\begin{array}{llll}
1) & a = vb & 5) & va = vb \\
2) & a = b & 6) & va = b \\
3) & a = vb_1 & 7) & va = vb_1 \\
4) & a = b_1 & 8) & va = b_1 .
\end{array}
$$

Il 2) ed il 6) furono accettati da Thomson (come forme *u* ed *y*) e da Spalding (come forme a^2 ed i^2). — Bain, op. cit. I. p. 129 seg., Mill, op. cit. I. p. 196-198, nota.

2) G. B. Halsted. *Statement and reduction of syllogism*. Journ. spec. Phil. vol. XII. p. 418.

I giudizî infiniti o limitativi non differiscono dai negativi che per l'espressione: i primi avendo la negazione al predicato, gli altri alla copula. Essi sono equivalenti (vedi più sopra). I giudizî ipotetici sono *relazioni* di giudizî (§ 13); i disgiuntivi, giudizî composti (§ 15). La distinzione dei giudizî secondo la modalità, [1] considera la possibilità, la realtà o la necessità della relazione espressa, e naturalmente deve basarsi su motivi psicologici o metafisici. Di essa pur si dirà alcunché al § 33. Kant distinse ancora il giudizio analitico, nel quale il predicato è già dato implicitamente nel soggetto — a, è prima del giudizio $a < b$ —, dal giudizio sintetico, nel quale il predicato si aggiunge (fra le note) del soggetto appunto col giudizio — ab è prodotto dal giudizio $a < b$ Cfr. § 11, oss.

§ 13. Possiamo confrontare i giudizî fra di loro e, come per i concetti, notare tre relazioni principali.

La prima relazione è quella nella quale esprimendo un giudizio α è anche implicitamente espresso un giudizio β: ogniqualvolta vi è α, vi è β; α appare come causa che trae seco β quale effetto: P. es. « ogniqualvolta piove (α), le strade sono bagnate (β) ».

Tale rapporto, che si mostra nel giudizio « se vi è α, vi è β, che si dice ipotetico, [2] si dice rapporto di subordinazione di α a β, e, come per i concetti, si scrive:

$$\alpha < \beta$$

« α è minore o contenuto in β, « α è parte di β » « da α si deduce β ». Pertanto si dice che la causa è contenuta nell'effetto.

---

1) ARISTOTELE, *Anal. pr.* I, 2: *πᾶσα πρότασίς ἐστιν ἢ τοῦ ὑπάρχειν ἢ τοῦ ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχειν ἢ τοῦ ἐνδέχεσθαι ὑπάρχειν.*

2) ὑπόθεσις, ἀξίωμα συνημμένον *(stoici)* onde il « coniunctum » o « adiunctum » dei latini, che appena da Boezio si chiamò ipotetico.

Il termine minore (protasi) si disse ἡγούμενον, il maggiore (apodosi) dagli aristotelici ἑπόμενον, dagli stoici λῆγον. La conseguenza, espressa nel segno $<$, ἀκολουθία.

In tale rapporto stanno i giudizî *a* ed *i*, *e* ed *o*, quando hanno rispettivamente eguale materia. Di modo che è

$$a < i$$
$$e < o$$

Quindi si dice che il giudizio universale è subordinato al giudizio particolare, avente eguale materia e qualità. [1]) P. es.

se « tutti gli uomini sono mortali, » « alcuni uomini sono mortali »,

se « nessun uomo nasce schiavo, alcuni uomini non nascono schiavi ».

Il segno $<$ si può leggere « quindi » « perciò »... (*ergo*).

Naturalmente la subordinazione di α a β non si può interpretare in senso inverso, cioè che « tutte le volte che v'è β, vi è α »; allora sarebbe $\beta < \alpha$.

Se valgono assieme, come caso speciale, tanto $\alpha < \beta$ che $\beta < \alpha$, si dice che le proposizioni α e β sono equivalenti, equipollenti, identiche, eguali e si scrive

$$\alpha = \beta$$

P. es. « Indebolimento fisico produce abbattimento morale » ed « Abbattimento morale produce indebolimento fisico ».

1) Ciò concorda con quanto si dirà al § 14 intorno alla sfera dei giudizi. — Invece nei concetti il concetto universale è sovraordinato al particolare, laonde, avendo ritenuta per sfera del giudizio, quella del soggetto — p. es. BAIN *op. cit.* p. 117 — finora quasi sempre si disse che il giudizio particolare è subordinato all'universale (!).

α e β sono scambievolmente causa ed effetto (azione reciproca: *Wechselwirkung*).

Quando di un giudizio α solo una parte è subordinata a β, e un'altra no, si dice che α e β stanno in seconda relazione o in interferenza.

Tale rapporto si mostra come giudizio ipotetico della forma; « alle volte se vi è α vi è β » od « alle volte se vi è α non vi è β » p. es.

« alle volte se il barometro è alto il cielo è sereno »
ed « alle volte se il barometro è alto, il cielo non è sereno »

Si scrive

$$\alpha \ int. \ \beta;$$

od, il segno *int.* essendo simmetrico, è pure

$$\beta \ int. \ \alpha$$

« alle volte se il cielo è sereno il barometro è alto » ecc.

Quando nessuna parte di α è subordinata a β, si dice che α e β stanno in III relazione, che sono fra loro disgiunti, contrarî . . . .

Tale rapporto si mostra nel giudizio ipotetico, « giammai se vi è α vi è β » oppure « se vi è α non vi è β ». p. es.

« Giammai se v'è plenilunio, v'è eclissi di sole »

Si scrive

$$\alpha \,)(\, \beta$$

ed, il segno)(essendo simmetrico, è pure

$$\beta \,)(\, \alpha$$

« Quando s'eclissa il sole non v'è plenilunio »

I giudizî che stanno in questo rapporto ed hanno eguale materia sono i giudizî *a* ed *e:* p. es.

se « nessun corpo semplice è decomponibile, » è falso che « tutti i corpi semplici sieno decomponibili ».

e « tutti gli uomini sono mortali » è falso che « nessun uomo è mortale ».

§ 14. Di una serie di giudizî $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$ disposti in modo che sia

$$\alpha < \beta < \gamma \ldots < \lambda,$$

chiamiamo λ il massimo, α il minimo. P. es.

« piove » $<$ « le strade sono bagnate » $<$ « c'è più pericolo di cadere » $<$ « conviene camminare con cautela »....

« piove » è un *minimo,* « conviene camminare con cautela » un *massimo.*

---

1) Alcuni distinguono la identità o perfetta eguaglianza (ἰσότης) di contenuto e di sfera, dalla equipollenza (ἰσοδυναμία) che sarebbe una eguaglianza di sfera e *non* di contenuto. Per altro, avuto riguardo al principio della relatività delle nostre definizioni, sembrami di potersi ritenere autorizzati a non ammettere quest'ultimo caso e quindi ad usare di tutti questi vocaboli senza distinzione. Su di ciò mi riservo di trattare altrove.

Si dice somma di due giudizî α e β, il minimo giudizio che contiene sì α che β, e si denota con $\alpha + \beta$ che si legge « α *più* β » ed esprime la sussistenza d'uno almeno dei due giudizî. P. es.

« ha piovuto (α) » *o* « c'è stata una forte nebbia » (β).

« Il triangolo ha due angoli eguali », $=$ « il triangolo è isoscele » $+$ « il triangolo è equilatero ».

Si dice prodotto di due giudizî α e β, il massimo giudizio contenuto sì in α che in β, e si denota con $\alpha . \beta$ che si legge « α moltiplicato β, » ed esprime la sussistenza contemporanea dei due giudizî. P. es.

« Alcuni cŏrpi semplici sono metalli » *e* « il mercurio è liquido ».

« Pongo dell'acqua ad una temperatura di 100° C. » $\times$ « lo stato barometrico, igrometrico dell'ambiente è normale » $<$ « l'acqua bolle ».

La somma dei massimi giudizî che entrano nella ricerca, rappresenta il giudizio maggiore di tutti i giudizî, che tutti li comprende e che non è condizionato da nessuno. È un giudizio che vale sempre, che è identicamente vero e si segna con 1.

Per ogni giudizio α sarà adunque $\alpha = 1$ oppure $\alpha < 1$.

$\alpha = 1$ vorrà dire che il giudizio α è *sempre* vero; $\alpha < 1$ vorrà dire che α non è sempre vero.

Il prodotto dei minimi giudizî o in generale il prodotto di due giudizî che stanno fra di loro nella III

relazione, è un giudizio che non sussiste, e rappresenta un detto impossibile. Si segna con 0.

Di modo che $\alpha = 0$, vorrà dire il giudizio α *non è mai vero*, che è *sempre falso;* all'incontro l'altro caso possibile $\alpha > 0$, vorrà dire che α non è sempre falso, ma che è talvolta vero. [1]

La somma delle parti di un giudizio si chiama la sfera di esso giudizio, il prodotto dei giudizî di cui esso è parte, il contenuto. [2]

La somma di tutti i giudizî che stanno nella III relazione con un dato giudizio α si chiama negazione od opposto contradditorio di α e si scrive α_1 che si legge *non* α.

Quindi per definizione è

$$\alpha + \alpha_1 = 1$$

$$\alpha\alpha_1 = 0$$

Si dimostra che per ogni α un tale α_1 esiste, ed uno solo; ed è

$$(\alpha_1)_1 = \alpha.$$

Perciò da

$$\alpha = 0 \quad \text{si deduce} \quad \alpha_1 = 1$$

1) Cfr. § 16.

2) Cfr. le definizioni analoghe date per la sfera e contenuto di un concetto al § 9.

$\alpha > 0$ » $\alpha_1 < 1$

$\alpha < 1$ » $\alpha_1 > 0$

$\alpha = 1$ » $\alpha_1 = 0$

e viceversa.

Conoscendo la relazione tra *A* e *B* espressa dal giudizio α, importa conoscere quale relazione è espressa dalla sua negazione. Se α è un giudizio semplice α_1 negherà che la relazione espressa da α abbia luogo e quindi affermerà che abbia luogo delle altre relazioni possibili. P. es. negando il giudizio α.

$$A < B$$

si afferma che ha luogo o A *int.* B o A > B o A)(B: ciò che vale all'asserire che « alcuni (forse tutti) A sono B_1 » — come risulta dall' ispezione delle figure euleriane. Quindi la negazione del giudizio *a* è un giudizio *o*. Analogamente la negazione di un giudizio *e* è un giudizio *i*.

Così si hanno le relazioni:

$$a_1 = o \qquad o_1 = a$$

$$e_1 = i \qquad i_1 = e.$$

Al § 16 si insegnerà a trovare la relazione od il sistema di relazioni corrispondente alla negazione di una relazione o di un sistema di relazioni date, fra due o più quantità logiche.

Per la definizione della negazione è

$$[\alpha\ )(\ \beta] = [\alpha < \beta_1]$$

$$[a\ \mathit{int.}\ \beta] = [\upsilon\alpha < \beta]\ [w\alpha < \beta_1]$$

ed ogni relazione fra i giudizî è ridotta alla subordinazione.

Le formule soprascritte in unione a quelle ricavate al § 13, servono per rappresentare tutte le relazioni che corrono tra i giudizî *a, e, i, o,* di medesima materia. E sono le seguenti:

$a = a$	$i > a$	$e < a_1$	$o = a_1$
$a < i$	$i = i$	$e = i_1$	$o > e$
$a < e_1$	$i = e_1$	$e = e$	$o > i_1$
$a = o_1$	$i > o_1$	$e < o$	$o = o$

che possono dedursi dal così detto quadrato logico [1])

1) Le relazioni e le figure del quadrato logico sono già dati da Aristotele e dai suoi primi commentatori: per altro scambiano il posto dell'*e* con l'*o*.

La subalternazione [1]) esprime la subordinazione di di *a*, *e* ad *i*, *o* (e, naturalmente la sovraordinazione di *i*, *o* od *a*, *e*), per cui dalla verità di *a*, o di *e* si deduce la verità di *i* o di *o*, o dalla falsità di *i* o di *o* si deduce la falsità di *a* o di *e*: Da

	a = 1	e = 1
si deduce	i = 1	o = 1
e da	i = 0	o = 0
si deduce	a = 0	e = 0.

La contrarietà [2]) esprime la disgiunzione tra *a* ed *e*, per cui dalla verità di *a* o di *e*, si deduce la falsità di *e* o di *a*.

Se	a = 1	e = 1
allora	e = 1 1	a = 1 1
cioè	e = 0	a = 0.

a ed *e* non possono essere entrambe contemporaneamente vere (ae = 0).

1) ὑπάλληλαι, « alterutrae » (M. Capella) « subalternae » (Boezio).

2) ἐναντίαι; ἐναντίως δὲ τὴν τοῦ καθόλου κατάφασιν καὶ τὴν τοῦ καθόλου ἀπόφασιν.... διὸ ταύτας μὲν οὐχ οἷόν τε ἅμα ἀληθὲς εἶναι. (Arist. *de interpr.* 7) « incongruae » (M. Capella) « contrariae » (Boezio). (« subcontrarie » secondo De Morgan).

La contraddizione [1]) esprime la negazione di *a* ed *e* con *o* ed *i*, per cui dalla verità o falsità di *a* od *e* si deduce la falsità o verità di *o* od *i*. Da

$$a = 1 \quad | \quad e = 1$$

si deduce

$$o_1 = 1 \quad | \quad i_1 = 1$$

cioè

$$o = 0 \quad | \quad i = 0$$

E da

$$a = 0 \quad | \quad e = 0$$

si deduce

$$o = 1 \quad | \quad i = 1.$$

E vice versa. a ed o, e ed i non possono essere entrambe false nè entrambe vere. (ao = 0, ei = 0, $a_1 o_1 = 0$, $e_1 i_1 = 0$).

La subcontrarietà [2]) esprime la subordinazione di i_1 od o_1 ad o ed i_1 per cui dalla verità di i_1 ed o_1 cioè dalla falsità di i ed o, si deduce la verità di o ed i.

Se $i_1 = 1 \quad | \quad o_1 = 1$

cioè se $i = 0 \quad | \quad o = 0$

è $o = 1 \quad | \quad i = 1$

1) ἀντιφατικαί « pugnantes » contradictoriae » (De Morgan « contrarie »).

2) ἀντικείμεναι κατὰ τὴν λέξιν μόνον (Aristotele. *Anal, pr.* II, 15). ὑπεναντίαι (Ammonio). « suppares » « subcontrariae » (De Morgan « ipercontrarie »).

i ed *o* non possono essere entrambi falsi ($o_1 i_1 = 0$).
Naturalmente poi ciascuno dei giudizî *a, e, i, o* è identico a sè stesso; cioè a = a, e = e.... ecc.

Ma qui va fatta un'osservazione che toglie lo stretto rigore alle formule costituenti il quadrato logico. L' « *alcuni* » del giudizio *o* opposto contradditorio di *a*, va inteso nel senso di « non nessuno, forse tutti » cioè la negazione di

$$A < B$$

è:

$$AB > 0 \quad \text{(cfr. § 16)}$$

mentre nel giudizio *o* subordinato ad *e*, l'alcuni vuol dire « parte, non tutti » cioè

$$A < B_1$$

è subordinato a

$$vA < B_1 .$$

E così pel giudizio *i*. Le relazioni tra i giudizî saranno trattate nuovamente al § 16.

Si vede che il medesimo simbolismo che usammo pei concetti e per le loro relazioni è qui riprodotto per i giudizî e per le loro relazioni. Quindi ogni scrittura logica può interpretarsi indifferentemente come espressione di relazioni ed operazioni coi concetti, oppure come espressione di relazioni ed operazioni coi giudizî. E considerando i giudizî secondo la loro sfera,

ci potremmo valere nuovamente dei simboli euleriani, nei quali la estensione di un giudizio può anche essere considerata come estensione di un concetto, e, cioè, come « campo di validità » di esso giudizio, come « somma delle occasioni nelle quali esso è vero ». Poichè i singoli giudizî che sono parti della sfera del giudizio dato, interpretati come concetti sono appunto i momenti, le occasioni nelle quali il giudizio è vero. Se esso è vero sempre (in tutti i momenti, per tutte le occasioni) cioè se è identico, la sua sfera, α, che convenimmo essere allora eguale ad 1, equivale alla massima grandezza del campo di sua validità, espresso dall'analogo segno per l'« universe of discourse » dei concetti. Se esso è alle volte vero, la sua sfera è $>, 0, < 1$, e corrisponde a quel pezzo determinato del campo del pensabile pel quale è vero. Se esso è falso (cioè in verun momento od occasione è valido) il campo di sua validità è nullo; in tal caso naturalmente sarà identicamente vero il suo contradditorio, che ha sfera $\frac{\alpha}{1}$, complementare di α per l'1, ecc....

Il Sig. Hugh Mc Coll, ha usato per primo i segni 0 ed 1 per esprimere la verità e la falsità dei giudizî [1]) ma senza darne

1) Hugh Mc Coll, *The calculus of equivalent statements.* (Proc. of the London math. Soc. vol. IX. 1877 p. 9: « The above title seems to be the most suitable for an analytical method which I discouvered a fews months ago, and to which a short introduction was published in the « Educational Times » for last July, under the name of « Symbolical Language ».... The fundamental principles of the method are as follows: Let any symbol, say A, B, C etc. denote statements (or propositions)..., Then the equation

$$A = 1$$

asserts that the statement *A* is true; the equation

$$A = 0$$

asserts that the statement *A* is false.... » Sulla riduzione di ogni giudizio alla forma $A = 1$ vedi esercizi.

la ragione, ed anzi imperfettamente non si convenendo ad un giudizio semplicemente vero il segno 1. che spetta alla identità: ma il segno > 0. GEORGE BOOLE [1]) aveva però ancor prima, posto in risalto la importanza della idea del tempo nel quale un giudizio è vero (cioè se sempre, alle volte o giammai): quindi CHARLES PEIRCE [2]) quello della classe delle occasioni nelle quali è vero. PEANO [3]) introduce una classe $(x : \alpha)$ per tutti quei valori (x) - del soggetto - che soddisfanno all'equazione logica (α). Naturalmente allora questa classe è misura della validità della proposizione α: però il giudizio può allora essere sempre vero se $(x : \alpha) = a$; cioè se tal classe è eguale a tutto il soggetto, senza che sia necessariamente $(x : \alpha) = 1$. Volendo essere conformi alla scrittura di prima la sfera di validità del giudizio si dovrebbe esprimere con $\frac{[x : \alpha]}{[a]}$, che sarebbe il rapporto della classe dei concetti soddisfacenti l'equazione, la quale classe è parte del soggetto, colla classe del soggetto. Allora è tale rapporto eguale ad 1 e a 0, quando il giudizio è sempre o giammai vero: ed esso rapporto corrisponde al noto significato dell'1 e del 0 nella teoria delle probabilità [4]).

§ 15. Il prodotto $\alpha\beta$ e la somma $\alpha + \beta$ di due giudizî, sono, per la loro definizione, nuovi giudizî, che si diranno composti dai giudizî α e β, che si considerano semplici. Lo stesso dicasi dei prodotti e somme di più di due giudizî, ed in generale di funzioni di giudizî.

I giudizî composti della forma: $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots.$ si dicono

---

1) BOOLE *op. cit.* p. 163 « To investigate the nature of connexion of secondary Propositions (sc. proposizioni ipotetiche) with the idea of time....

If the proposition X is true, the proposition Y is true »: An undoubted meaning of this proposition is, that the *time* in which the proposition X is true, is *time* in which the proposition Y is true (coexistence).

2) PEIRCE *op. cit.* p. 18 la chiama « state of things in which the proposition.... is true ».

3) PEANO *op. cit.* p. 7-9.

4) Vedi § 33, osservazione.

congiuntivi [1]) quelli della forma $\alpha + \beta + \gamma \cdots$ *disgiuntivi* [2]), quelli della forma $\alpha(\beta + \gamma)$, *misti.*

Un giudizio congiuntivo, cioè un prodotto di giudizî, $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ può anche dirsi sistema di più giudizî, $\alpha\,\beta\,\gamma \ldots$ simultanei: mentre un giudizio disgiuntivo, cioè una somma dî giudizî, $\alpha + \beta + \gamma \cdots$ può anche dirsi sistema dî giudizî alternativi; riservando il nome di sistema di giudizî disgiunti al caso in cui tutti i giudizî $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sono a due a due nella III relazione. Ogni giudizio composto può ridursi ad una somma disgiunta in cui ogni singolo addendo è un giudizio congiuntivo (*vedi esercizî*).

In questi giudizî composti, i giudizî semplici rimangono inalterati come elementi.

Alcune volte in luogo di un giudizio composto di più giudizî può sostituirsi un giudizio elementare di concetti composti: questo giudizio si dirà fuso o composto per fusione dal sistema dei giudizî dati.

Così scrivendo in luogo della forma abbreviata α l'intero giudizio $a < b$; in luogo di β, $c < d$ ecc.; dai giudizî simultanei o congiuntivi

$$\alpha\beta = (a < b)\,(c < d)$$

otteniamo, moltiplicando o sommando membro a membro (« überschiebend ») le due disuguaglianze a destra, le nuove relazioni fuse:

---

1) e 2) I nomi greci συμπεπλεγμένον e διεζευγμένον derivano dagli stoici e furono voltati in latino coi vocaboli « coniunctum » « copulativum » e « disiunctum », però essi si riferiscono piuttosto ai giudizi congiuntivi e disgiuntivi in senso stretto, di cui si dirà più innanzi.

$$(1)\ ac < bd$$

ed $$(2)\ (a + c) < (b + d)$$

e quindi per un teorema noto (cioè: $ab \leqq a + b$, es. al § 8), anche

$$(3)\ ac < (b + d).$$

Invece nel giudizio disgiuntivo (in senso lato: cioè alternativo)

$$\alpha + \beta = (a < b) + (c < d),$$

non possiamo eseguire le operazioni membro a membro, non valendo (generalmente) le due relazioni simultaneamente. Possiamo invece asserire che vale il giudizio fuso:

$$(3)\ ac < b + d.$$

Bisogna osservare che il giudizio fuso è (in generale) sovraordinato, non identico al giudizio composto da cui derivò, cioè:

$[(a < b)(c < d)] < [ac < bd]$, $[(a < b)(c < d)] < [(a + c) < (b + d)]$, $[(a < b)(c < d)] < [ac < (b + d)]$, $[(a < b) + (c < d)] < [ac < (b + d)]$.

Di questi teoremi si darà la dimostrazione negli *esercizî*.

Di speciale importanza sono i giudizî fusi risultanti da giudizî che hanno eguale soggetto od eguale predicato; così che, per il teorema $aa = a + a = a$ — si ottengono le forme:

$$(1)\ a < bd,$$

$$(2)\ a + c < b,$$

$$(3)\ a < b + d,$$

$$(4)\ ac < b;$$

Tutte derivabili da due giudizî simultanei, ove sia rispettivamente $a = c$ — in (1) e (3) — e $b = d$) — in (2) e (4) —. Da due giudizî alternativi o disgiunti non può derivarsi che la (3), che perciò si dice giudizio alternativo o disgiuntivo in senso stretto, e si legge

(3) *a* è o *b* ovvero *d* »;

p. es. « Pietro è in casa o fuori ».

Se la disgiunzione è perfetta, allora i giudizî alternativi originarî saranno fra di loro incompatibili, cioè sarà

$$(a < b)\ (a < d) = o$$

ciò che vuol dire che uno, ma non più, di essi sarà vero; l'altro (o gli altri) falso.

Due giudizî disgiunti che hanno eguale predicato, non possono fondersi in uno — che dovrebbe avere la forma (4) — perchè, se la disgiunzione è perfetta, il prodotto *ac* suole svanire. Pertanto volendo significare che

« o a oppure c è b »

ma non tutt'e due assieme, si dovrà scrivere il giudizio composto

$$(a < b) + (c < b).$$

Le forme (1) e (2) si dicono giudizî congiuntivi in senso stretto e si leggono:

(1) « *a* è *b* e *d* » « L'antica Roma era grande e potente ».

(2) « *a* e *c* sono *b* » « Gli arabi e i persiani sono mussulmani ».

La forma (3) e la (4), dedotte da un sistema congiuntivo (cioè non disgiunto!) — possono ritenersi come giudizî congiuntivi, ma più deboli dei corrispondenti (1) e (2)

(3) « *a* è *b* oppure d » « L'antica Roma era grande e potente ».

(4) « *a* che è *c*, e *b* » « Gli arabi persiani sono mussulmani ».

(Si noti che « grande » e « potente » non s'escludono, e che v'hanno « arabi residenti in Persia! »).

S'osservi che

$$[(a < b)\ (a < d)] = [a < bd] < [a < (b + d)]$$

$$[(a < d)\ (c < d)] = [(a + c) < d] < [ac < d]$$

mentre è sempre

$$[(a < b) + (a < d)] < [a < (b + d)].$$

Veggansi gli esercizî.

Quando valgono simultaneamente i due giudizî

$$a < b + d$$

e $$b + d < a$$

si ha l'identità

$$a = b + d$$

che si dice *giudizio divisivo:* P. es. « Stati d'animo piacevoli o dolorosi si dicono sentimenti » (e viceversa « i sentimenti sono stati d'animo piacevoli o dolorosi »).

Quando valgono simultaneamente i giudizî

$$a < bd$$

e $$bd < a$$

si ottiene l'identità

$$a = bd$$

che si dice *giudizio definitivo o definitorio*. P. es. « Il ghiaccio è acqua solidificata ». (« L'acqua solidificata è ghiaccio »).

Su questi giudizî si ritornerà al § 28.

In modo analogo a questo si definiscono i giudizî congiuntivi e disgiuntivi, definitivi e divisivi per più di due concetti per addendi o fattori nel soggetto o nel predicato.

I giudizî ipotetici, come abbiamo veduto al § 14, non sono veramente giudizî composti, ma relazioni di giudizî semplici, e possono dirsi relazioni di II grado rispetto ai concetti. Similmente possono darsi relazioni

di III, IV.... n^{mo} grado, quando soggetto e predicato sieno rispettivamente relazioni di II, III.... $(n-1)^{mo}$ grado. P. es.

$$[a < b) < (c < d)] < [(e < f) < (g < h)]$$

sarebbe una relazione del 3.° ordine, equivalente a « se è vero il giudizio ipotetico $(a < b) < (c < d)$ è vero il giudizio ipotetico $(e < f) < (g < h)$ ».

Ad esempio: « Supposto che, se i poligoni regolari, hanno un egual numero di lati, essi sieno fra di loro simili; allora, supposto che i cerchî sieno poligoni regolari, aventi un egual numero di lati, anche i cerchî sone figure simili » (LINDNER). E così via.

Distinguendo i casi in cui le singole proposizioni sono della forma *a, e, i, o;* i giudizî ipotetici offrono già sedici varietà cioè, scrivendo una dopo dopo l'altra la forma del precedente $(a < b)$ e del conseguente $(c < d)$, si dànno i casi:

aa, ae, ai, ao
ea, ee, ei, eo
ia, ie, ii, io
oa, oe, oi, oo. [1])

1) Di questi casi si occuparono di già gli stoici, i quali distinsero le quattro forme

se è vero $(a < b)$ è vero $(c < d)$
se è falso $(a < b)$ è falso $(c < d)$
se è vero $(a < b)$ è falso $(c < d)$
se è falso $(a < b)$ è vero $(c < d)$

SEXT. EMP. *pyrrhon, hyp.* II, 105), che corrisponderebbero ai casi *aa, oo, ao, oa;* e BOEZIO *(de syll. hypothetico)*.

Per le relazioni di grado superiore tale varietà è più grande, ad esempio, per le relazioni del terzo ordine il numero delle forme è già di 256 [1]).

§ 16. Ogni giudizio

$$a < b$$

può ridursi alla forma

$$(1)\quad ab_1 = 0$$

— basta all'uopo moltiplicare la diseguaglianza data per b_1, per cui s'ottiene

$$ab_1 < bb_1$$

cioè

$$ab_1 < 0;$$

donde, essendo per la definizione dello 0,

$$ab_1 \geqq 0$$

si ricava la forma voluta —.

Medesimamente per la definizione dello 0, la negazione del giudizio $a < b$, ossia

1) Vegansi gli *esercizi*.

$$(ab_1 = 0)_1$$

è

$$(2)\ ab_1 > 0;$$

Se ab_1 non è eguale a 0, dovrà essere maggiore. Dato il concetto ab_1 non vi sono che le due forme possibili di giudizî esistenziali [1]): ab_1 esiste oppure non esiste. Così dato il concetto *uomo* (a) e *non-mortale* (b_1), o non si daranno *uomini immortali,* ed allora tutti gli *uomini* saranno *mortali;* oppure uomini immortali vi saranno ed il giudizio « *tutti gli uomini sono mortali* » sarà falso.

Scambiando a con a_1 e b con b_1 avremo i seguenti otto giudizî elementari semplici, dei quali quattro della forma (1):

$ab = o$ ossia $a < b_1$: « tutti gli a sono b_1 » (*a*) o « ness uno a è b » (*e*)

$ab_1 = o$ ossia $a < b$: « tutti gli a sono b » (*a*) o « nessun a è b_1 » (*e*)

$a_1b = o$ ossia $a_1 < b_1$: « tutti gli a_1 sono b_1 (*a*) o « nessun a_1 è b » (*e*).

$a_1b_1 = o$ ossia $a_1 < b$: « tutti gli a_1 sono b (*a*) o « nessun a_1 è b_1 » (*e*)

che diconsi giudizî universali e quattro della forma (2):

$ab > o$ « sonvi alcuni a che sono b » (*i*)

$ab_1 > o$ « sonvi alcuni a che sono b_1 » (*i*) oppure « alcuni a non sono b (*o*)

1) Cfr. § 11 oss.

$a_1b > o$ « sonvi alcuni a_1 che sono b » (*i*)

$a_1b_1 > o$ « sonvi alcuni a_1 che sono b_1 (*i*) oppure « alcuni a_1 non sono b (*o*) »

che diconsi giudizî particolari.

Giova notare che se i giudizî universali così definiti con la forma (1), corrispondono pienamente ai giudizî universali (positivi e negativi secondo il predicato) *a* ed *e* già definiti; esprimendo l'equazione

$$ab = o$$

la disgiunzione tra a e b, cioè il giudizio $a < b_1$ (*e* per a e b; *a* per a e b_1), la definizione del giudizio particolare dato dalla forma (2)

$$ab > o$$

non coincide con quella di prima

$$va < b, $$ [1])

(per la quale li avevamo denominati *i* ed *o*). Difatti la forma (2), consistendo nella negazione della 1), dice in primo luogo che tanto *a* che *b* sono diversi da zero — mentre nella 1) potevano anche uno o tutt'e due svanire — in secondo luogo nega che *a* e *b* sieno in terza relazione:

« *sonvi* alcuni *a* che sono *b* »

per tanto può darsi il caso che tra *a* e *b* interceda la (1) o la (2) relazione

« alcuni *forse tutti* gli a sono b ».

1) Cfr. § 12 oss.

Ora il giudizio

$$va < b$$

non fa alcuna supposizione circa l'esistenza reale di *a* e di *b*; ed asserisce che a è in (2) relazione con *b*

« alcuni, *ma non tutti* gli a sono b ».

Però sebbene con le forme 1) e 2) si esaurisca la varietà possibile dei giudizî, e quindi come osserva il CAYLEY [1]), la distinzione sia certamente completa essendo le due forme fra loro contradditorie, giova non pertanto mantenere ancora la forma $va < b$, specialmente quando questi « alcuni a » sono un concetto determinato, per sostenere l'edificio della logica tradizionale. Altrimenti adottando esclusivamente la definizione data dalla forma (2), bisogna dare eccessiva importanza alla *suppositio realis* ed abbattere tutta la dottrina delle conversioni, riducendole solamente alla *conversio simplex* [2]) (cfr. § 19).

Del resto i giudizî particolari delle forme

$$va < b$$

rientrano nel caso dei giudizî universali della forma (1), potendosi scrivere

$$vab_1 = o;$$

ma in allora la relazione non è più elementare semplice, ma bensì elementare fra le tre quantità *a, b, v*, delle quali l'ultima è, in massima, indeterminata.

Analogamente un giudizio elementare fra più con-

1) A. CAYLEY, *Note on the calculus of logic*. Quart. Journal of pure and applied mathematics vol. XI p. 282.

2) SCHRÖDER *op. cit.* vol. II. 1. parte p. 247.

cetti *a, b, c . . . n* che, esprimendo *una* relazione fra i medesimi, avrà la forma

$$f\,(a,\ b,\ c \ldots n) < \varphi\,(a,\ b,\ c \ldots n)$$

potrà ridursi alla forma

$$f\,(a,\ b,\ c \ldots n)\ \varphi\,(a,\ b,\ c \ldots n)_1 = o$$

moltiplicando la diseguaglianza, membro a membro, per la negazione della funzione $\varphi\,(a,\ b,\ c \ldots n)$ e ponendo

$$f\,(a,\ b,\ c \ldots n)\ \varphi\,(a,\ b,\ c \ldots n)_1 = F\,(a,\ b,\ c \ldots n)$$

si potrà scrivere

$$F\,(a,\ b,\ c \ldots n) = o$$

Un giudizio di tal forma si dirà giudizio elementare universale. La negazione della relazione espressa, cioè un giudizio della forma

$$F\,(a,\ b,\ c \ldots n) > o,$$

si dirà giudizio elementare particolare.

Si domanda quanti e quali giudizî elementari si possono enunciare con *n* concetti dati, *a, b, c . . . n?*

Questo problema è stato proposto dal sig. JEVONS [1]) e da lui risolto per i casi n = 1, 2, 3, il sig. CLIFFORD [2]) considerò il caso n = 4 ed è si può dire il problema fondamentale della logica.

Potendosi F (a b c . . . n), funzione dei soli argomenti a, b, c . . . n, ridurre ad una somma disgiunta

$$\Sigma \, (a \; b \; c \ldots n),$$

ove ognuna delle lettere a, b, c . . . n può essere ovvero no fornita del segno della negazione [3]), tutti i giudizî elementari possibili con gli *n* concetti dati avranno la forma

$$\Sigma \, (a, b, c \ldots n) = 0$$

oppure

$$\Sigma \, (a, b, c \ldots n) > 0.$$

Per tanto vi saranno tanti giudizî elementari universali e tanti giudizî elementari particolari quante diverse somme disgiunte si daranno. Esse constano di addendi della forma

$$a \; b \; c \; d \ldots n$$

---

1) Proc. of the Manchester phil. Soc. vol. VI p. 65-68, Mem. III Séries, vol. V p. 119-130 *the Principles of Science* vol. I. p. 154-161 *Studies in deductive logic*. p. 286-289.

2) Proc. of the Manchester phil. Soc. vol. XVII p. 88-101.

3) Vedi gli esercizi 40 e 41.

che si dicono prodotti elementari od elementi. E poichè ognuna delle n lettere (argomenti) può essere fornita del segno della negazione o no, si dànno 2^n di tali elementi diversi.

P. es. per $n = 2$ se ne dànno $2^2 = 4$, che sono

$$ab, ab_1, a_1b, a_1b_1$$

per $n = 3$, $2^3 = 8$, cioè

$$abc, abc_1, ab_1c, a_1bc, ab_1c_1, a_1bc_1, a_1b_1c, a_1b_1c_1$$

e così via.

Nelle somme Σ, possono adunque entrare gli addendi in un numero inferiore o al più eguale a 2^n, onde possiamo distinguere, per n concetti, 2^n specie diverse di somme a seconda che constano di 1, 2, 3.... 2^n elementi, e corrispondentemente 2^n specie diverse di giudizî (particolari od universali) che si chiamano giudizî a 1, 2, 3.... 2^n *rilievi,* [1]) intendendosi per rilievo il prendere in considerazione, il rilevare un elemento cioè il porlo nella somma Σ.

Così p. es. dati due concetti a, b, nella somma

$$\Sigma\ ab$$

potremo avere sino quattro rilievi:

$$ab \geqq 0 \text{ sarebbe un giudizio ad un rilievo}$$

....

1) Ted. « Aushebungen »; ingl. « simple, two-fold, three-fold... n fold statement ».

$ab + ab_1 \geqq 0$ » » a due rilievi

$ab_1 + a_1b + a_1b_1 \geqq 0$ » » a tre » ecc.

Con tre concetti *a*, *b*, *c* possiamo avere fino otto rilievi:

$$abc_1 + a_1b_1c + ab_1c + a_1b_1c_1 + ab_1c_1 > 0$$

sarebbe p. es. un giudizio particolare a cinque rilievi; ecc.

Potendo ciascuno dei 2^n elementi comparire o no nella somma, si danno in tutto 2^{2^n} somme possibili. Con r rilievi vi sono $\frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ldots r}$ somme possibili, corrispondenti alle combinazioni di 2^n elementi, presi r alla volta.

Naturalmente è

$$\sum_{r=1}^{2^n} \frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)\ldots(2^n-r+1)}{1.\ 2.\ 3.\ \ldots\ r} = 2^{2^n}$$

Come si sa anche per un noto teorema d'analisi.

Adunque con *n* concetti si potranno enunziare 2^{2^n} giudizî elementari universali e 2^{2^n} giudizî elementari particolari.

Per $n = 1, 2, 3, 4 \ldots$ questo numero è rispettivamente eguale a 4, 16, 256, 65536 . . .

Ma di questi giudizî non son tutti fra di loro essenzialmente diversi: essendovi un numero molto più limitato di giudizî tipici o tipi ai quali possono essere ricondotti.

Se in un giudizio poniamo una lettera in luogo dell'altra (e quindi la sua negazione in luogo della negazione dell'altra) e viceversa; p. es. se invece di *a* poniamo *b* (e quindi in luogo di a_1, b_1) ed invece di *b* (o b_1) poniamo *a* (od a_1), si dice d'aver fatto uno scambio. Con questo la forma del giudizio rimane inalterata, potendosi intendere con *a* e *b* concetti qualsivoglia.

Lo scambio di *a* con *b* si denota con $\binom{a}{b}$ Ad esempio il giudizio a 5 rilievi sovraccennato diventa per questo scambio

$$bac_1 + b_1 a_1 c + ba_1 c + b_1 a_1 c_1 + ba_1 c_1 > o$$

oppure, ordinando le lettere

$$abc_1 + a_1 b_1 c + a_1 bc + a_1 b_1 c_1 + a_1 bc_1 > o.$$

Si dimostra facilmente che

$$\binom{a}{b} = \binom{b}{a} = \binom{b_1}{a_1} = \binom{a_1}{b_1}$$

Così pure è uno scambio

$$\binom{a}{a_1},$$

quando in luogo d'una quantità si pone la sua negazione e viceversa.

Inoltre è pure

$$\binom{a}{b_1} = \binom{a_1}{b} = \binom{b}{a_1} = \binom{b_1}{a};$$

ecc.

Tutti i giudizî che si possono derivare da un giudizio dato mediante scambî, si dicono rappresentanti del tipo del giudizio dato.

Perciò due giudizî saranno del medesimo tipo quando con un certo numero di scambî potranno rendersi identici.

Naturalmente è necessario all'uopo che abbiano egual numero di rilievi e che sieno tutt'e due universali o tutt'e due particolari.

P. es. $ab + ab_1 = 0$ ed $a_1b + a_1b_1 = 0$

sono dello stesso tipo, potendosi ricondurre il secondo al primo mediante il semplice scambio $\binom{a}{a_1}$.

Non si potè ancora scoprire in generale quanti e quali sieno i tipi dei giudizî che si possono enunciare con *n* concetti nè trovare il numero dei rappresen-

tanti pertinenti ad ogni singolo tipo: finora è riuscito solamente il calcolo per n = 1, 2, 3, 4 [1]).

Per n = 2, date i concetti *a* e *b*, le 16 differenti somme sono

$$0, \text{ a nessun rilievo}$$

$$ab,\ ab_1,\ a_1 b,\ a_1 b_1, \text{ ad un rilievo}$$

$$ab + ab_1,\ ab + a_1 b,\ ab + a_1 b_1,$$

$$ab_1 + a_1 b,\ ab_1 + a_1 b_1,$$

$$a_1 b + a_1 b_1, \text{ a due rilievi}$$

$$ab + ab_1 + a_1 b,\ ab + ab_1 + a_1 b_1,$$

$$ab + a_1 b + a_1 b_1,\ ab_1 + a_1 b + a_1 b_1, \text{ a tre rilievi}$$

$$ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1, \text{ a quattro rilievi.}$$

Le somme a 0, 1, 3, 4 rilievi sono rispettivamente del medesimo tipo, quelle a 2 rilievi hanno due tipi; dell' uno è rappresentante

---

1) La soluzione del problema per 1, 2, 3 concetti, data dal Jevons, fu corretta e completata da Miss Ladd *Studies in logic* by members of the Johns Hopkins University, Boston, Little Brown, 1883 p. 67-68. Cfr. Schröder *op. cit.* vol. I p. 646-647, vol. II p. XII. Clifford (l. c.) calcolò il numero dei tipi per il caso n = 4. — In una mia prossima pubblicazione mi occuperò del calcolo del numero dei rappresentanti per codesti tipi, e lì enumererò. La medesima pubblicazione tratterà inoltre del principio dello studio del caso n = 5; ed alcuni teoremi fondamentali per la risoluzione del caso *n* in generale.

$$ab + ab_1 ,$$

dell'altro

$$ab + a_1 b_1 .$$

Abbiamo adunque, per due concetti, sei specie diverse di somme, che eguagliate a zero dànno sei specie di giudizî universali e poste maggiori di zero, dànno sei specie di giudízi particolari. I tipi delle somme sono:

I (a zero rilievi) 0

II (ad un rilievo) ab

III (a due rilievi, 1. tipo) $ab + ab_1$ $(= a)$

IV (a due rilievi, 2. tipo) $ab + a_1 b_1$

V (a tre rilievi) $ab + ab_1 + a_1 b$ $(= a + b)$

IV (a quattro rilievi) $ab + ab_1 + a_1 b + a_1 b_1$ $(= 1)$.

Le corrispondenti specie di giudizî sono:

Universali	Particolari
I $0 = 0$ (principio d'identità cfr. § 23).	$0 > 0$ (giudizio assurdo. cfr. § 23).
II $ab_1 = 0$ (« tutti gli *a* sono *b* » giudizio universale).	$ab > 0$ (« alcuni *a* sono *b* » giudizio particolare).
III $a = 0$ (« non vi è *a* » giudizio esistenziale negativo).	$a > 0$ (« vi è *a* » giudizio esistenziale affermativo).

IV $ab + a_1 b_1 = 0$ (« a è b_1 » e viceversa, giudizio equipollente. cfr. esercizi).	$ab + a_1 b_1 > 0$ (« *a* non è eguale a b_1 » negazione dell' equipollenza).
V $a + b = 0$ (« non vi è nè *a* nè *b* » giudizio congiuntivo esistenziale. cfr. esercizî).	$a + b > 0$ (« vi è o *a* o *b* forse tutt' e due » giudizio alternativo esistenziale).
VI $1 = 0$ (giudizio assurdo).	$1 > 0$ (principio di contraddizione. cfr. § 23).

Un giudizio elementare della forma

$$\Sigma\,(abcd...) = 0 \text{ oppure } \Sigma\,(abc....) > 0$$

può scriversi semplicemente

$$\Sigma\,A_k = 0 \text{ oppure } \Sigma\,A_k > 0,$$

significando con A_k ($k = 1, 2.... m$) i prodotti elementari o costituenti; ed in virtù del teorema esposto all'esercizio 22), vedi anche esercizî a codesto § 16 — si riduce alla forma:

$$\Pi\,(A_k = 0) \text{ oppure } \Sigma\,(A_k > 0),$$

In fine ponendo

$$[A_k = 0] = \alpha_k \text{ }^{1)}$$

e la sua negazione

$$[A_k > 0] = \alpha'_k,$$

1) Giudizî primitivi oppure giudizi di De Morgan (Schröder).

si hanno le due forme

$$\Pi \alpha_k \quad \text{e} \quad \Sigma \alpha'_k ,$$

che rappresentano rispettivamente un giudizio elementare come prodotto o come somma dei giudizî elementari ad un rilievo, α_k.

Combinando addittivamente, moltiplicativamente od in tutt'e due i modi più giudizî elementari, avremo un sistema alterno, congiunto o misto di relazioni logiche, ossia un giudizio composto.

Essendo ogni singolo giudizio elementare una funzione (prodotto o somma) dei giudizî elementari ad un rilievo (o monomî) α_k (ed α'_k), un giudizio composto dovrà pure essere funzione di codesti giudizî e pertanto si potrà porre nella forma

$$F(\alpha_k).$$

Sviluppando la $F(\alpha_k)$ in somma disgiunta, ogni giudizio composto avrà la forma

$$\Sigma (\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m ,$$

ove gli α_k $(k = 1, 2 \ldots m)$ possono o no avere l'accento della negazione. Vi saranno dunque 2^m di tali prodotti della forma

$\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$ [1])); Ed il numero di tutti i diversi giudizî composti possibili sarà dato dal numero di tutte le somme possibili con questi 2^m prodotti. Questo numero è, per un ragionamento analogo ad un precedente, 2^{2^m}. Ricordandosi ora che per n concetti il numero m degli A_k, cioè dei costituenti possibili, è eguale a 2^n:

Il numero complessivo di tutti i giudizî che si possono enunziare con n concetti è eguale a

$$2^{2^{2^n}}$$

Questo numero fu scoperto dal Prof. Giuseppe PEANO [2]), però escludendo il giudizio assurdo

$$1 = 0,$$

l'identità

$$0 = 0$$

....

1) Ciascuno di questi prodotti rappresenta una determinata posizione dei concetti a, b, c, d.. cioè un sistema di relazioni fisse tra i medesimi: e ve ne sono di tanti tipi e rappresentanti, quanti tipi e rappresentanti hanno i giudizî elementari coi medesimi concetti a, b, c, d...; facendo corrispondere, poniamo, un rilievo dell'addendo A_k, alla negazione del relativo giudizio primitivo α_k, cioè alla posizione α' — anzi che α — nel prodotto.

Di ciò tratto nel lavoro, di prossima pubblicazione, citato a pag. 96, nota.

2) Cfr. PEANO, Calcolo geometrico, Torino, Bocca 1888 p. X.

ed una serie di giudizî superflui (ripetuti o derivati da altri), il numero viene ridotto a

$$2^{\left(2^{2^n} - 1\right)} - 2.$$

Così per n = 1, si hanno $2^{\left(2^2 - 1\right)} - 2 = 2^3 - 2 = 6$ giudizî

1) (α_1); $a = 0$ 2) (α'_1); $a > 0$

3) (α_2); $a_1 = 0$ oppure $a = 1$ 4) (α'_2); $a_1 > 0$ oppure $a < 1$

5) $(\alpha'_1\ \alpha'_2)$; $(a > o)\ (a_1 > 0)$ oppure $0 < a < 1$

6) $(\alpha_1 + \alpha_2)$; $(a = 0) + (a_1 = 0)$ oppure $(a = 0) + (a = 1)$
[*a* è o *0* od *1*].

Restando esclusi il giudizio identico (1), l'assurdo (0), e i giudizî superflui $(\alpha_1\ \alpha'_2)$, $(\alpha'_1\ \alpha_2)$, $(\alpha_1\ \alpha_2)$, $(\alpha_1 + \alpha'_2)$, $(\alpha'_1 + \alpha_2)$, $(\alpha'_1 + \alpha'_2)$, $(\alpha_1\ \alpha_2 + \alpha'_1\ \alpha'_2)$, $(\alpha_1\ \alpha'_2 + \alpha'_1\ \alpha_2)$, che darebbero assieme ai precedenti un numero di giudizî eguale a 16 $\left(= 2^{2^2}\right)$.

Per n = 2 il numero dei giudizî possibili è 32766; per n = 3, 4 . . . . la cifra cresce rapidissimamente. [1]) Vi è naturalmente un numero molto più limitato di tipi (o giudizî tipici),

1) Cfr. Schröder *op. cit.* vol. II parte 1. p. 168-178.

ai quali molti giudizî possono essere ricondotti mediante la sostituzione dei simboli letterali dei concetti; Ma il problema di stabilire quanti e quali tipi di giudizi composti possano darsi con n concetti è più difficile di quello di stabilire i tipi dei soli giudizî elementari, che fu già accennato; e non fu ancor risoluto [1]).

Si può osservare, che quanto fu detto per le relazioni dei concetti vale per le relazioni dei giudizî, bastando interpretare le lettere $a, b, c\ldots$ come giudizî, e quindi le $\alpha_1 \alpha_2 \ldots$ come giudizî ipotetici. Anzi in generale rappresentando con a, b, c una qualunque quantità logica, cioè una relazione di grado qualunque (cfr. § 13), la dottrina ora esposta si applica alle relazioni fra queste quantità logiche, e le lettere $\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots$ esprimono le relazioni del grado prossimo superiore.

Esercizî e problemi.

Al § 12. — 43) Dare esempî di giudizî universali e di giudizî particolari;

44) di giudizî affermativi e di giudizî negativi. — Distinguerli inoltre per la quantità in a, e, i, o.

45) Si indichi la quantità, la qualità, e la modalità (in senso kantiano) dei seguenti giudizi:

« Ogni corpo è pesante », « ogni corpo può essere pesato », « ogni corpo deve occupare uno spazio », « è possibile che Nettuno sia abitato » (LINDNER).

« alcuni uomini sono felici » « alcuni cibi non devono mangiarsi nei giorni di astinenza » « nessun triangolo *ha* due angoli non minori di un retto ».

Al § 13. — 46) Dare esempî di giudizî che stanno in I relazione.

---

1) Il problema fu indicato da Cristina LADD. *Studies in logic* by members of the Iohns Hopkins University. Boston, Little Brown & C. p. 1883 p. 67.

47) In II relazione.

48) In III relazione.

49) I. Che relazioni intercedono fra le seguenti coppie di giudizi:

« L'acqua gela »; « Il termometro è sopra zero » — « Il triangolo è scaleno »: il triangolo è ottusangolo ». — L'acqua è un elemento »; « L'acqua consta di ossigeno ed idrogeno » — « I vizi sono riprovevoli »; « La superbia è riprovevole » — « Il cielo è sereno »; « Il barometro è alto » — La stufa è accesa »; « La stanza è calda » — Il *dieci* è numero pari »; « Il dieci è divisibile per due » — « V'è plenilunio »; « S'eclissa il sole » — « Il triangolo è equilatero »; « Il triangolo è equiangolo ». —

II. Esempî di relazioni tratti dal Bain: Forma $(a < b) < (c < d)$: « Se il tempo è bello, noi andremo in campagna », « Se ella subì il contagio, morrà ». Forma $(a < b) = (c < d)$: « Se una certa quantità di forza fu spesa, una quantità equivalente si sviluppò ». Forma $(a < b_1) < (c < d)$: Se il soccorso non viene, la città si renderà ». Forma $(a < b) < (c < d_1)$: « Se il porto è gelato, bastimenti non possono entrare ». Forma $(a < b_1) < (c < d_1)$: « Se non v'è Dio, non v'è vita futura ». — Lindner: Forma $v(a < b) < (c < d)$: « Alle volte se l'uomo fa del bene, viene ricompensato ». Forma: $v(a < b) < (c < d_1)$ « Alle volte se il genio scopre nuove teorie non viene perseguitato ».

51) Dare esempî di somme e di prodotti di giudizî.

52) Formare la negazione dei giudizî dati ai numeri 43), 44) e 45).

53) Ridurre a subordinazioni di giudizî i giudizî ipotetici dei numeri 47) 48) e 49).

54) Dare esempî di contenuti e di sfere di dati giudizî. — Analogamente a quanto fu detto per i concetti si può dare una definizione rigorosa del contenuto e della sfera di un dato giudizio nel modo seguente:

Dal sistema di relazioni:

$$\begin{array}{ll} \alpha_k < \beta_1 & \alpha_1 < \beta_i \\ \alpha_k < \beta_2 & \alpha_2 < \beta_i \\ \dots\dots & \dots\dots \\ \alpha_k < \beta_n & \alpha_m < \beta_i \\ \hline \end{array}$$

si deduce: Contenuto di $\alpha_k = \prod_{i=1}^{n} \beta_i$ Sfera di $\beta_i = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k$.

Al § 15. — 55). Dare esempî di giudizî congiuntivi e alternativi e misti, cioè delle forme $\alpha\, \beta\, \gamma ....$, $\alpha + \beta + \gamma ....$, $\alpha(\beta + \gamma) ...$, [Delle prime due forme sono già gli esempî del n. 51)].

56) Formare la negazione degli esempî del n. precedente.

Si osservi che la negazione di un giudizio alternativo è un giudizio congiuntivo e viceversa. Si dimostri che in generale è:

$$(\Sigma\alpha)_1 = \Pi\, (\alpha_1)$$

$$(\Pi\alpha)_1 = \Sigma(\alpha_1).$$

57). Un giudizio composto coi giudizî α, β, γ .... può dirsi funzione di questi e scriversi

$$F\, (\alpha, \beta, \gamma ...).$$

Si dimostri che tale funzione è sviluppabile per gli argomenti α, β, γ... e che si hanno in generale le formule:

$$F\, (\alpha ...) = F\, (1 ...)\, \alpha + F\, (0 ....)\, \alpha_1$$

$$F(\alpha\beta...) = F(11....)\,\alpha\beta + F(10....)\,\alpha\beta_1 + F(01....)\,\alpha_1\beta + F(00...)\,\alpha_1\beta_1.$$

[cfr. esercizio n. 39].

58) Un giudizio composto solamente dai giudizî $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu$, avrà la forma

$$F(\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu) = \Sigma(\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu)$$

dove ciascuna delle lettere $\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu$ sotto il segno della somma potrà avere o no il segno della negazione. [cfr. es. 40].

L'espressione $\Sigma(\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu)$ si dice somma disgiunta. Gli addendi, cioè i fattori della forma $(\alpha\ \beta\ \gamma \ldots \nu)$, possono essere in un numero non maggiore di 2^n indicando con n il numero dei giudizî dati $\alpha\ \beta \ldots$.

[cfr. § 16].

59). Coll'aiuto dei seguenti teoremi:

I... $(a < b) = (ab_1 = o)$ [§ 16).

II... $(x = 0)\ (y = 0) = (x + y = 0)$ [es. 22]

III... $(x = o)\ (y = o) < (xy = o)$ [per il II ed il IV]

$(x = o) + (y = o) < (xy = o)$ [bastando che uno dei fattori svanisca perchè xy sia eguale a zero].

IV... $x + y \geqq xy$ [es. 14],

si dimostrano facilmente le proprietà dei giudizî fusi congiuntivi e alternativi, riportate nel testo:

(1) $(a < b)\ (c < d) < (ac < b + d)$; diffatti $(a < b)\ (c < d) = (ab_1 = 0)\ (cd_1 = 0)$ (I)

$< (ab_1 \, cd_1 = 0)$ (III)

$< [ac \, (b + d)_1 = 0]$ (es. 23)

$< [ac < b + d]$ (I)

(2) $(a < b) + (c < d)] < (ac < b + d)$. In modo analogo.

(3) $(a < b) \, (a < d) = (ab_1 = 0) \, (ad_1 = 0) = (ab_1 + ad_1$

$= 0) = [a \, (b \, d)_1 = 0] = a < bd$, (IV).

$< (a < b + d)$.

(4) $(a < b) \, (c < b) = (ab_1 + cb_1 = 0) = [(a + c) \, b_1 = 0]$

$= a + c < b$, (IV):

$< (ac < b)$

(5) $[(a < b) + (a < d)] < (a < b + c)$ [dalla (2)]

(6) $[(a < b) + (c < b)] < (ac < b)$ [dalla (2)].

60) Si dieno esempî pratici, colla relativa rappresentazione grafica, delle formule dimostrate al numero precedente.

61) Tradurre in formole i seguenti giudizî composti: *Aggregati:*

« Tanto se il sole risplende nella stanza, come se si riscalda la stufa, si tempera l'aria della stanza ». « Tanto facendo il male, quanto tralasciando di fare il bene, non si adempie al proprio dovere ». « Se uno è moderato nel godimento dei piaceri,

non adempie soltanto ad un dovere morale, ma conserva in sè anche la suscettibilità per piaceri ulteriori ». « Se nel triangolo si traccia dal vertice dell'angolo retto una perpendicolare all'ipotenusa, si ottengono due triangoli simili al grande ed anche simili tra loro ». — Se vi è tanto un oggetto visibile quanto un occhio sano, quanta luce, vi si può vedere ». « Se disposizioni naturali si incontrano con un'accurata, ragionevole educazione e con buona fortuna: l'uomo può divenir grande » Se due rette sono tracciate nello stesso piano e non s'incontrano: esse sono parallele ». — « Se vi è una ricompensa, essa deve aver luogo in questa vita o nell'altra ». « Se un cono viene tagliato da un piano, la superficie che così si ottiene è o un cerchio o un elisse o un iperbole o una parabola ». (LINDNER). « Se vi sono animali o piante, vi devono essere germi preesistenti ». (BAIN).

Fusi. « Un battello può essere un battello a vela, o un battello a remi o un battello a vapore ». « Il metallo di che si fanno le monete è oro, od argento, o rame, o bronzo, o nichelio » (JEVONS). « Tanto i cattolici, quanto i Protestanti, gli Anglicani ed i Greci sono cristiani ». « Dio è benigno e giusto ». « Fede, speranza e carità sono virtù teologali ». « Magnetismo ed elettricità hanno tanto forza attrattiva, quanto repulsiva ». « Tanto l'avaro che lo scialacquatore non sono da lodarsi nè da imitarsi ». « Questo paese è un continente o un'isola ». « Questo corpo è o solido o liquido o fluido o aeriforme ». — Gli occhi vedono in modo normale o miope o presbite ». « Le macchine a vapore sono o fisse o locomotive o locomobili » (LINDNER). I sentimenti sono o piacevoli o dolorosi ». « Egli non può o non vuole farlo ». (BAIN).

62) Nel tradurre una proposizione espressa con parole in simboli logici bisogna badare all'interpretazione esatta delle congiunzioni « *e* » « *tanto* » « *quanto* » « *o* » ecc. affine di rendere esattamente la relazione pensata. P. es. la congiunzione « *e* » nel soggetto, per lo più deve significarsi col segno $+$ « *e* » nel predicato col segno $\times$. Così la proposizione « militari (a) e soci (b) sono invitati (c) » si scrive

$$a + b < c$$

Invece « Pietro (l) è buono (m) e diligente (n) »

$$l < m\, n$$

« Nella battaglia di Austerlitz Russi (*a*) ed Austriaci (*b*) furono vinti (*c*) e disfatti (*d*) »

$$a + b < cd.$$

Si ricorra alla rappresentazione grafica.

La formula ab < c bisogna tradurla col dire gli *a*, che sono anche *b*, sono *c:* I maggiorenni che sanno leggere (*a*) e scrivere (*b*), hanno diritto al voto (*c*).

Così pure bisogna distinguere accuratamente le proposizioni disgiuntive da quelle semplicemente alternative.

La proposizione

$$(1)\ (a < b) + (a < c)$$

è disgiuntiva quando vi s'aggiunge la condizione

$$(2)\ (a < b)\ (a < c) = 0.$$

P. es. « Pietro è a casa o all'ufficio »: ma non può essere in tutt'e due i luoghi. La congiunzione « *o* » corrisponde all'« *aut* » latino. Sviluppando il giudizio composto (1) in somma disgiunta si ha

$$(a < b) + (a < c) = (a < b)\ (a < c)_1 + (a < b)_1\ (a < c)$$

$$+ (a < b)\ (a < c) \quad = (a < b)\ (a < c)_1 + (a < b)_1\ (a < c)$$

sparendo l'ultimo addendo per la (2). Quindi equivale al dire « o Pietro è a casa e non è all'ufficio oppure è all'ufficio e non è a casa. »

Se non vale la condizione (2) il giudizio è semplicemente alternativo: la congiunzione « o » significa allora « *vel* ». Così p. es. dicendo « si emerge nella società per nobiltà o per censo » si ammettono tre casi o che uno emerga per sola nobiltà, o per solo censo o per tutt'e due.

Al § 16. 63). Dare esempî di tutti i giudizî elementari possibili con due concetti *a* e *b*.

P. es. posto a = « bianco », b = « dolce », i quattro giudizî universali e rispettivamente i quattro giudizî particolari monomî, cioè ad un rilievo, sono:

(Tipo ab = o)	(Tipo ab > o)
(1) « Non vi sono cose bianche e dolci » oppure « il bianco non è dolce ».	(1) « Vi sono cose bianche e dolci » oppure « alcunchè di bianco è dolce ».
(2) « Non vi sono cose bianche e non-dolci » « il bianco è dolce ».	(2) « Vi sono cose bianche e non dolci »; « alcunchè di bianco non è dolce ».
(3) « Non vi sono cose non-bianche e dolci »; « una cosa non bianca non è dolce ».	(3) « Vi sono cose bianche e dolci »; « alcune cose che non sono bianche sono dolci ».
(4) « Non vi sono cose non-bianche e non dolci » « ciò che non è bianco, è dolce ».	(4) « Vi sono cose non-bianche e non-dolci » « alcune cose non-bianche, non sono dolci ».

I quattro giudizî universali ed i quattro particolari, a due rilievi, tipo I, sono:

(Tipo a = o)	(Tipo a > o)
(1) « Non vi son cose bianche ».	(1) « Vi son cose bianche ».
(2) « Non vi sono cose dolci ».	(2) « Vi son cose dolci ».
(3) Non vi sono cose non-bianche ».	(3) « Vi son cose non-bianche ».
(4) « Non vi son cose non-dolci ».	(4) « Vi son cose non-dolci »,

I due giudizi universali, e i due particolari, a due rilievi, tipo II, sono:

(Tipo a = b)

(1) « Ciò che è bianco è dolce e vice versa ».

(2) « Ciò che è bianco è non-dolce, e viceversa ».

[Tipo $(a = b)_1$]

(1) « Il bianco non è eguale al dolce, e viceversa ».

(2) « Il bianco non è eguale al non-dolce, e viceversa ».

ecc.

64). Per due concetti, il numero dei giudizî rappresentanti i varî tipi — che, appare, surrogano l'antica distinzione dei giudizî nelle forme *a, e, i* ed *o* — si rileva dal seguente prospetto:

numero dei rilievi	0	1	2	3	4	somma
numero dei tipi	1	1	2	1	1	6
numero dei rappresentanti	1	4	4 + 2	4	1	16

Per tre concetti abbiamo $2^{2^3} = 256$ rappresentanti compresi in 22 tipi e distribuiti come segue:

numero dei rilievi	0	1	2	3	4	5	6	7	8	somma
numero dei tipi	1	1	3	3	6	3	3	1	1	22
num. dei rappresentanti	1	8	28	56	70	56	28	8	1	256

65). Per riconoscere il tipo a cui appartiene un dato giudizio bisogna ridurlo alla forma normale indicata al § 16. All' uopo si richiedono due operazioni: I. Ridurlo alla forma

$$f \geqq 0$$

ciò che si ottiene moltiplicando il membro a sinistra del segno $<$, (a), per la negazione del membro a destra (b_1). P. es.

$$ab + a\,(b_1 + c) < (b + c)\,(a_1 + b_1)$$

si riduce a

$$[ab + a\,(b_1 + c)]\,(b_1 c_1 + ab) = o.$$

II. Esprimere il membro a sinistra in somma disgiunta (cfr. es. 41).

66). Si dia a talento una qualunque relazione e la si rechi in forma normale

$$\Sigma\,(abc\ldots) \geqq o.$$

67). Quali sono i giudizî composti possibili coi due giudizî

$\alpha =$ « piove »

$\rho =$ « lo stato barometrico è alto »?

68). Il teorema

$(a + b = o) = (a = b)\,(b = o)$. Cfr. es. 22,

generalizzato, dà

$$[(\Sigma\, a_k) = o] = \Pi\, (a_k = o);$$

e negandolo:

$$[(\Sigma\, a_k) > o] = \Sigma\, (a_k > o).$$

Per il teorema medesimo è:

$$(ab + a_1 b_1 = o) = [(ab = o)\,(a_1 b_1 = o)]$$

$$= [(a < b_1)\,(b_1 < a)] = (a = b_1);$$

ecc.

Cap. IV

Dottrina del sillogismo

---

§ 17. Definizione — § 18. Distinzioni del sillogismo
§ 19. Trasformazione e risoluzione delle relazioni elementari (inversioni, sillogismi immediati)
§ 20. Eliminazioni delle relazioni elementari (sillogismi mediati). Le figure sillogistiche
§ 21. Trasformazione, risoluzione ed eliminazioni delle relazioni composte (sillogismi composti)

§ 17. Il sillogismo [1]) - in senso lato - è il procedimento col quale da date relazioni logiche se ne ricavano delle altre. Le relazioni date si chiamano *premesse* [2]).

---

1) Raziocinio, ragionamento; Lat. « ratiocinatio », « collectio » « conclusio ». Greco συλλογισμός. Ted. « Schlussfolgerung ».

2) Grec. προτάσεις. Lat. « praemissae » « enunciationes ».

le ricavate *conclusioni* [1]). P. es. nei sillogismi: « Tutti i triangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza; dunque i triangoli rettangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza »; « I pianeti hanno moto rotatorio; Marte è un pianeta; dunque *Marte* ha un moto rotatorio » le proposizioni « tutti i triangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza » e « I pianeti hanno moto rotatorio », « Marte è un pianeta » sono le premesse; le proposizioni: « I triangoli rettangoli misurano in superficie la base moltiplicata per la metà dell'altezza », « *Marte* ha un moto rotatorio » sono le rispettive conclusioni.

Il procedimento col quale dalle premesse si ricava la conclusione si basa su di un principio assiomatico, detto d'inferenza o di deduzione (Cfr. Capo V § 24) e consiste in operazioni — già da noi studiate — che si eseguiscono sulle premesse. P. es. per dedurre dalle premesse

(1) « se piove (α), le strade sono bagnate (β) »

(2) « ma le strade non sono bagnate ($\beta = o$) »

la conclusione

« dunque non piove » ($\alpha = o$)

si esprime la subordinazione (1) $\alpha < \beta$ nella forma

1) Grec. πέρασις. Ted. « Schluss ».

$\alpha\beta_1 = o$, quindi moltiplicando la premessa (2) per α ed addendola alla (1) si ottiene

$$\alpha\beta + \alpha\beta_1 = o \text{ cioè } \alpha(\beta + \beta_1) = \alpha = o.$$

Chiamiamo giudizio l'espressione di una qualunque relazione logica; sia che essa interceda fra concetti o fra relazioni di concetti, o fra relazioni di relazioni..... (relazioni di un grado qualunque). Quindi possiamo dire che il sillogismo è la deduzione di un giudizio da altri giudizî. Il giudizio dedotto (conclusione) è il risultato di operazioni eseguite sui giudizî dati (premesse).

In questo modo il sillogismo è definito logicamente, col giudizio e quindi col concetto.

Però il sillogismo non si deduce dal giudizio, come il giudizio dal concetto. Il giudizio viene definito come l'espressione delle relazioni tra i concetti e dai concetti si ricava mediante alcuni principî assiomatici (§§ 22, 23). Invece il sillogismo apparisce come il risultato di operazioni eseguite sui giudizî e si ricava da questi aggiungendo agli assiomi già assunti per le formazioni del giudizio, ancora un altro, cioè quello dell'inferenza.

I segni $>$, $<$, $=$,)(..... che esprimono relazioni fra quantità logiche in generale, producono *giudizî;* i segni $+$, $\times$, $-$, che significano relazioni, producono quantità composte e sillogismi. Si vede che così è terminata la serie delle forme elementari, perchè all'infuori di quantità logiche considerate per sè (concetti), relazioni od operazioni di queste quantità, altro la nostra mente non può logicamente pensare.

Quelle logiche che partono dal sillogismo e che quindi non hanno ancora definito il giudizio ed il concetto, devono darne una definizione non logica: P. es. il JEVONS, definita la logica come scienza del ragionare [1]) chiama sillogismo (raziocinio) quella forma di discorso con la quale ragioniamo [2]), e così si appoggia al linguaggio. Il GALLUPPI, avendo definita la logica come la scienza del raziocinio, spiega questo come un procedimento del nostro pensiero, come un fatto psicologico, che poi

1) JEVONS. *Logica*, trad. Di Giorgio, Milano, Hoepli, 1878 p. 3.
2) *ibid.* p. 8.

decompone ne' suoi elementi [1]. Il PEIRCE [2] dà pure una definizione psicologica.

§ 18. Distinguiamo i sillogismi anzitutto in categorici od ipotetici, a seconda che le premesse sono relazioni di concetti (relazioni di primo grado o giudizî nello stretto senso della parola) oppure relazioni di relazioni (relazioni di 2. grado, giudizî ipotetici oppure relazioni di grado superiore). Così il sillogismo: « Tutte le piante sono organismi: l'alga è una pianta, dunque l'alga è un organismo » è categorico: invece il sillogismo: « Se divido un parallelogrammo con una diagonale, i due triangoli che ne risultano hanno i lati rispettivamente eguali. Se due triangoli hanno i lati rispettivamente eguali, i due triangoli sono fra di loro eguali; quindi se divido un parallelogrammo con una diagonale, i due triangoli che ne risultano sono fra di loro eguali » è un sillogismo ipotetico.

A seconda che le premesse sono relazioni elementari (semplici o multiple) o composte (di forma congiuntiva disgiuntiva o mista), i sillogismi si diranno elementari (semplici o multipli) o composti (di forma congiuntiva, disgiuntiva o mista).

Del sillogismo ipotetico si parlerà al § 19, del composto al § 20. Intanto si osservi che perchè un sillogismo si dica categorico od elementare bisogna che tutte le premesse sieno rispettivamente relazioni di 1. grado, e, rispettivamente, relazioni elementari. Perchè si dica ipotetico, di grado *m.*, o composto basta che una sola premessa sia una relazione di grado *m.* oppure una relazione composta.

1) GALUPPI. *Elementi di filosofia*. Milano, Silvestri, 1864, vol. I, p. 10, 13.
2) PEIRCE. *On the algebra of logic* (Am. Jour. of. Math, vol. III) p. 16.

I sillogismi che hanno una sola premessa si dicono immediati e quelli che ne hanno più si dicono mediati. P. es. il sillogismo « La superficie d'ogni triangolo è misurata dalla base moltiplicata per l'altezza, dunque la superficie del triangolo rettangolo è misurata dalla base moltiplicata per l'altezza » oppure quest'altro « nessun uomo è immortale e perciò tutti gli uomini devono morire » sono sillogismi immediati; mentre tutti quelli citati più su sono mediati.

L'operazioni che si eseguiscono delle premesse per ricavare la conclusione possono essere naturalmente svariatissime. Le classificheremo nei tre gruppi principali, che seguono:

I. *Trasformazioni* delle relazioni date in altre relazioni equivalenti. In questo caso la conclusione esprime, in altra forma, le stesse relazioni che sono espresse dalle premesse. Così p. es. il giudizio

$$\alpha = 0$$

si trasforma, formando un sillogismo immediato in quest'altro,

$$\alpha_1 = 1$$

[s'intende sempre che in queste trasformazioni non avvengano i casi contemplati *sub* II o III, cioè risoluzioni od eliminazioni].

II. *Risoluzioni* delle relazioni. In questo caso le premesse sono relazioni, poniamo fra n quantità e la con-

clusione esprime la relazione di una di codeste quantità con le *n* — *1* rimanenti; cioè è la risoluzione di tutto il sistema di premesse, per questa quantità, che apparisce sola in un membro della conclusione (per lo più nel primo, come soggetto).

P. es. la inversione (cfr. § 19, II) del giudizio

$$a < b_1$$

— che funge da unica premessa — nel nuovo giudizio (conclusione)

$$b < a_1 .$$

III. *Eliminazione* di quantità. In questo caso dalle premesse che esprimono relazioni fra *n* quantità logiche, si ricava, come conclusione, una nuova relazione fra *n* — *m* quantità, eliminandone *m*. — Le quantità eliminate si chiamano termini medî. La conclusione dicesi anche risultato dell'eliminazione o risultante delle premesse.

P. es. essendo n = 3, m = 1, e due il numero delle premesse, il sillogismo ottenuto mediante l'eliminazione del termine medio, è il solito sillogismo categorico aristotelico. Le due quantità (n — m = 3 — 1 = 2) che compariscono nella conclusione si dicono termine maggiore e termine minore (cfr. § 20).

Combinando questi singoli procedimenti, or enunciati, con le distinzioni dei sillogismi fatte prima, otterremo

diverse specie di sillogismi che saranno oggetto di studio nei §§ seguenti.

§ 19. Ogni relazione elementare può trasformarsi in infiniti modi in altri equivalenti; diffatti I) una relazione

$$\Sigma(abc....) \geqq 0$$

negando membro a membro — e quindi scambiando i segni $\leqq$ in $\geqq$ — diventa

$$[\Sigma(abc...)]_1 \leqq 1.$$

La negazione della somma disgiunta Σ è, per l'es. 41, II, una nuova somma disgiunta, che denotiamo con Σ'; Pertanto avremo la relazione data trasformata nella seguente

$$\Sigma'(abc...) \leqq 1,$$

che sarà un nuovo giudizio equivalente al primo.

P. es. dal giudizio « tutti i cattolici (*a*) sono cristiani (*b*) », cioè

$$ab_1 = o,$$

si deduce

$$ab + a_1 b + a_1 b_1 = 1,$$

cioè « ognuno è o cristiano cattolico, o cristiano acattolico oppure nè cristiano nè cattolico ».

II. Moltiplicando entrambi i membri per una medesima quantità: oppure aggiungendo una medesima quantità ad entrambi, otterremo una nuova relazione equivalente. Diffatti se ho

$$a < b,$$

il sistema congiuntivo

$$(a < b)\ (c = c) < (ac < bc)$$
$$(a < b)\ (c = c) < (a + c < b + c)$$

— cfr. es. 59 — mi esprime la possibilità di dette trasformazioni.

In forza di questo teorema possiamo ridurre anche i giudizî particolari sotto la forma di giudizî universali. Diffatti il giudizio particolare

$$\Sigma\ (abc...\ ) > o$$

potrà scriversi

$$\Sigma\ (abc...\ ) = R$$

ove R è una quantità non evanescente, cioè che è sempre > 0 (quantità *reale*). Moltiplicando l'equazione per R_1, si ha

$$R_1\ \Sigma\ (abc...\ ) = o$$

ove R_1 — essendo negazione di R — è una quantità che non può essere tutto il pensabile, ma è sempre < 1 (quantità *parziale*) [1].

Adunque ogni giudizio può trasformarsi in un' equazione avente il membro a destra eguale a zero, colla differenza che nel membro a sinistra sonvi ovvero no quantità parziali, a seconda che la relazione è particolare od universale.

Però tale trasformazione, benchè teoreticamente importante, non ha grande utilità nella pratica, perchè il membro a sinistra non è più funzione delle sole quantità date *a b c*..., ma ancora delle quantità parziali indeterminate.

Ogni giudizio $a < b_1$ può ridursi alla forma evanescente (§ 16)

$$ab = 0$$

e viceversa:

$$(ab = o) = (a < b_1).$$

Ora, essendo pel principio commutativo

$$ab = ba,$$

sarà anche

$$ba = o$$

e quindi

$$b < a_1.$$

Perciò:

Da ogni giudizio $(a < b_1)$ si può dedurre un altro

1) Cfr. PEIRCE, *op. cit.* p. 30. — VOIGT, *op. cit.* p. 23 segg.

ponendo in luogo d'ognuno dei termini la negazione dell'altro ($b < a_1$). Questa trasformazione si chiama *contrapposizione* [1].

Per questa regola

$$a < b \text{ si converte in } b_1 < a_1,$$

$$va < b \quad » \quad vb_1 < a_1 \text{ (da } vab_1 = vb\,a_1 = o),$$

$$va < b_1 \quad » \quad vb < a_1.$$

Quindi i giudizî *a* ed *i* diventano rispettivamente *e* ed *o;* i giudizî *e* ed *o* rimangono tali. —

Ridotto il giudizio $a < b_1$ alla forma

$$ab = o$$

combinandolo coll'identità

$$v = v$$

avremo

$$(ab = o)\,(v = v) < (vab = o)$$

1) *Contrapositio.* Greco: ἀντιστρέφειν (Galeno. — Cfr. Prantl. *op. cit.* vol. I, p. 568).

cioè

$$< (va < b_1).$$

Quindi:

Da ogni giudizio universale $(a < b_1)$ si può dedurre un giudizio particolare $(va < b_1)$ rendendo particolare il soggetto (cioè ponendo va in luogo di a). Questa trasformazione si chiama *subalternazione* [1]).

Così si ha dal giudizio $a < b$ il particolare: $va < b$.
Quindi dai giudizî *a* ed *e* si deducono, giudizî *i* ed *o*.
Il giudizio particolare dedotto è della forma $va < b$; per averlo nella forma $ab > o$ bisogna aggiungere la condizione $a > o$.
Diffatti, ricorrendo all'identità

$$a = ab + ab_1$$

se vale il giudizio $a < b$, il secondo addendo a destra (ab_1) svanisce, e pertanto rimane

$$a = ab$$

e sarà $ab > 0$ quando $a > 0$;
e si ha dunque l'alternativa

$$(a < b) = [(a = o) + (ab > o)]\ ^{2)}.$$

1) Cfr. §§ 13, 14.
2) Cfr. PEIRCE *op. cit.* p. 18. SCHRÖDER *op. cit.* vol. II, parte I, p. 243, 244.

Pel principio commutativo essendo

$$ab = ba,$$

il giudizio particolare della forma

$$ab > o$$

può anche scriversi

$$ba > 0.$$

Cioè « vi sono alcuni a che sono b » diventa « vi sono alcuni b che sono a ».
Quindi :

Da un giudizio particolare (nella forma non evanescente) si deduce un altro giudizio particolare scambiando il soggetto col predicato. Questa trasformazione si dice *conversione pura.* [1])

Analogamente i giudizî

$$ab_1 > 0, \quad a_1 b > 0, \quad a_1 b_1 > 0$$

1) *Conversio simplex;* Greco, ἀναστρέφειν. (Galeno). Aristotele usa il vocabolo ἀντιστρέφειν per l'*inversione* in generale: Così dice negli *Anal. pr.* I, τὴν μὲν ἐν τῷ ὑπάρχειν καθόλου στερητικὴν ἀνάγκη τοῖς ὅροις ἀντιρέφειν, οἷον εἰ μηδεμία ἡδονὴ ἀγαθόν, οὐδ' ἀγαθὸν οὐδὲν ἔσται ἡδονή (*contrapposizione* del giudizio *e*), τὴν δὲ κατηγορικὴν ἀντιστρέφειν μὲν ἀναγκαῖον, οὐ μὴν καθόλου ἀλλ' ἐν μέρει (*conversio per accidens*) . . . . τῶν δὲ ἐν μέρει τὴν μὲν καταφατικὴν ἀντιστρέφειν ἀνάγκη κατὰ μέρος (*conversio simplex*).

Psello ha le specificazioni ἀντιστροφὴ ἁπλῆ = *conversio simplex*, ἀντιστροφὴ κατὰ συμβεβηκός = *c. per accidens*, ἀντιστροφὴ κατ' ἀντίθεσιν = *contrapositio.*

diventano rispettivamente, per conversione pura;

$$b_1 a > 0, \qquad b a_1 > 0, \qquad b_1 a_1 > 0.$$

La conversione pura dei giudizi particolari della forma

$$va < b, \qquad va < b_1$$

presenta invece alcune difficoltà.
Convertendo il giudizio *i*

« alcuni *a* sono *b* »

nell'altro

« alcuni *b* sono *a* »

si ha l'espressione « *alcuni b* » che non significa più « *alcuni ma non tutti* » come per gli « *alcuni a* » ($va < a$); quindi non si ha un giudizio *i* della medesima forma di prima. Diffatti, se posso dedurre dal giudizio

$$va < b$$

la equazione

$$va = wb$$

e quindi invertendo

$$wb = va$$

od, a fortiori,

$$wb < a;$$

Quest'ultimo giudizio, risultato dalla conversione, ha per soggetto il *wb*, che non era astretto alla condizione di essere $wb < b$, e poteva benissimo essere $= b$. Laonde l'« *alcuni* » del giudizio convertito non significa « non tutti » come nel giudizio dato.

Il giudizio *o:*

$$va < \underset{1}{b}$$

si converte (con la medesima osservazione per il *w*) nel giudizio particolare

$$\underset{1}{wb} < a$$

che però non può ritenersi per un giudizio *o*, e quindi non va confuso col giudizio

$$wb < \underset{1}{a}.$$

Dal giudizio *o:*

« alcuni *a* non sono *b* »

si deduce il giudizio

« alcuni non *b* sono *a* »

che è ben diverso dal giudizio (o)

« alcuni *b* non sono *a* »

che a prima vista sembrerebbe potersi ottenere per la conversione dei termini. — Qui bisogna stare attenti al significato del negativo (cfr. § 8 p. 69). Il giudizio che può dedursi, della forma

$$\underset{1}{wb} < a$$

è uno dei quattro giudizî introdotti da De Morgan (cfr. § 8 p. 65 [1]).

Riducendo un giudizio universale

$$a < b$$

alla forma

$$va < b$$

mediante subalternazione, e quindi, per conversione pura, in

$$wb < a,$$

si trasforma il giudizio

« tutti gli a sono b »

in quest'altro

« alcuni b sono a »

[si osservi qui pure il significato indeterminato del vocabolo alcuni].

Pertanto:

Da un giudizio universale ($a < b$) si può dedurre un giudizio particolare ($wb < a$) invertendo il giudi-

---

1) Molti autori non hanno esplicitamente constatato questo fatto. È curioso il modo come ne tratta il Lindner, il quale ammette la conversione pura pel modo *o* [*op. cit.* p. 63: « Se consideriamo i risultati dell'inversione dei giudizî A, E, I, O seconde le due regole suesposte (per I, O soltanto la prima che suona: « *il giudizio può invertirsi rendendo però particolare il predicato* p. 62 »).....] e nel dare gli esempi lo converte giustamente nel giudizio di Morgan: « Alcune verità non sono provate. Alcuni teoremi non provati sono verità » [*l. c.* cfr, anche p. 66, lo schema 22].

zio dato e rendendo particolare il predicato (*b*). Questa trasformazione dicesi *conversione impura* [1]

In modo simile da

$$a < b_1, \quad a_1 < b, \quad a_1 < b_1$$

si deducono rispettivamente i giudizî

$$wb_1 < a \quad wb < a_1 \quad wb_1 < a_1 .$$

Si ripeta l'osservazione precedente.

Per ottenere dal giudizio universale $(a < b)$ un giudizio particolare della forma non evanescente $(ba > o)$, per conversione impura, bisogna aggiungere la condizione che il soggetto dato sia reale $(a > o)$. Allora

$$(a < b).\,(a > o) < (ab_1 = o)\,(ab + ab_1 > o) < (ba > o);$$

analogamente

$$(a < b_1)\,(a > o) < (b_1\,a > o)$$

$$(a_1 < b)\,(a_1 > o) < (ba_1 > o)$$

$$(a_1 < b_1)\,(a_1 > o) < (b_1\,a_1 > o).$$

La conversione e la contrapposizione chiamansi anche inversioni dei giudizî.

Il problema più generale dell' inversione consiste nella risoluzione di un sistema di giudizî fra *n* concetti,

1) *Conversio per accidens*. Greco ἀναστρέφειν κατὰ μέρος.

per un concetto. In tal modo il concetto scelto apparirà come soggetto di un nuovo giudizio nel quale si contiene una relazione esplicita fra esso e gli altri n — 1 concetti. Questo problema non fu ancor risoluto in generale [1].

Se il sistema di giudizî è simultaneo ed i giudizî sono universali — oppure anche particolari della forma va $<$ b — la risoluzione per un concetto x si trova facilmente.

Diffatti tutto il sistema può ridursi ad una unica equazione della forma:

$$f(x) = o$$

(Cfr. es. al § 16).
Sviluppando f(x) per x si ha

$$f(1)\ x + f(o)\ x_1 = 0 \qquad \text{(cfr. es. al § 10)},$$

donde si ricava l'equazione

$$x = f(0) .\ u_1 + f(1)_1 .\ u \qquad \text{(vedi } \textit{esercizî}\text{)},$$

dove *u* è un concetto arbitrario che può variare da 0 ad 1: e questa equazione è la risoluzione per x del sistema dato, cioè la inversione del sistema medesimo [2].

§ 20. Chiamando conclusione il giudizio ottenuto mediante una delle trasformazioni studiate al § pre-

....

1) Cfr. Schröder *op. cit.* vol. II Parte 1. p. 215, 216, p. 371-400 — Voigt *op. cit.* §§ 13, 23, 31.

2) Cfr. Schröder *op. cit.* vol. I p. 446-477. — La risoluzione d'una equazione è quella funzione dei coefficienti dell'equazione, tale che sostituita per x nella equazione stessa dà per risultato la *risultante* (dell'eliminazione) — di cui si dirà a § 21 —... (Voigt p. 17).

cedente, con quanto si disse si studiarono i sillogismi immediati.

Ora si passa a studiare i sillogismi mediati, cioè quelli nei quali la conclusione viene ricavata dai giudizî dati mediante l'eliminazione dei termini medî. Il caso più semplice del sillogismo mediato è quello che consta di due premesse e di tre termini, uno il soggetto (*a*, termine minore), il secondo (*b*, termine maggiore) il predicato della conclusione, il terzo (*x*, termine medio) il concetto che si elimina e che quindi comparisce solo nelle premesse; e le premesse sono giudizî elementari semplici. La premessa che contiene il termine medio ed il maggiore dicesi premessa maggiore, la premessa che contiene il termine medio ed il minore dicesi premessa minore. Questo è il sillogismo tradizionale aristotelico ed ha la forma:

premessa maggiore . . . (b, x)
» minore. . . . . (a, x)

---

conclusione (a, b).

A seconda che il termine medio funge da soggetto o da predicato nelle singole premesse, abbiamo le seguenti quattro combinazioni, che si dicono 1ª, 2ª, 3ª e 4ª figura sillogistica: [1])

---

1) I vocaboli tecnici greci sono πρότασις (*praemisso*), λῆμμα (*sumptio, propositio* = premessa maggiore), πρόσληψις (*assumptio* = premessa minore) ὅρος (*terminus*), μέσον (*terminus medius*), ἄκρα (*termini extremi maior et*

$$\underset{1}{\varphi}(x) < \underset{1}{\psi}(b) \qquad \underset{1}{\varphi}(b) < \underset{1}{\psi}(y) \qquad \underset{1}{\varphi}(x) < \underset{1}{\psi}(b) \qquad \underset{1}{\varphi}(b) < \underset{1}{\psi}(x)$$

$$\underset{2}{\varphi}(a) < \underset{2}{\psi}(b) \qquad \underset{2}{\psi}(a) < \underset{2}{\psi}(x) \qquad \underset{2}{\varphi}(x) < \underset{2}{\psi}(a) \qquad \underset{2}{\varphi}(x) < \underset{2}{\psi}(a)$$

$$\overline{\varphi(a) < \psi(b)} \qquad \overline{\varphi(a) < \psi(b)} \qquad \overline{\varphi(a) < \psi(b)} \qquad \overline{\varphi(a) < \psi(b)}$$

Ciascuna premessa può inoltre essere uno dei quattro giudizî *a e i* ed *o;* pertanto avremo, per ogni figura, sedici combinazioni di premesse, che si dicono *modi*, [1]) cioè:

Modo	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.
Premessa maggiore...	a	a	a	a	e	e	e	e	i	i	i	i	o	o	o	o
» minore.......	a	e	i	o	a	e	i	o	a	e	i	o	a	e	i	o

In tutto saranno 64 di tali modi (= 4 × 16). Però non da tutti, eliminando la x, si ha come conclusione una relazione tra a e b, cioè un giudizio della forma richiesta:

$$\varphi(a) < \psi(b),$$

poichè in molti la eliminazione dà per risultato la identità 0 = 0, oppure un giudizio esistenziale, $a > 0$.

....

minor). E dalla posizione, ritenuta fondamentale della prima figura il termine maggiore è quello ἐν ᾧ ἄλλο ἐστίν, il minore ἐν ἄλλῳ ὄν. La « figura » si disse σχῆμα.

1) τρόποι.

b > 0 ecc.; in questo caso i modi furono considerati come non valevoli [1]. Così si esclusero:

1.°) Tutti i modi con entrambe le premesse negative [cioè i modi: 6.°, 8.°, 14.°, 16.°: quindi quattro per ogni figura, 16 in tutto];

2.°) I modi con entrambe le premesse particolari [cioè: 11.°, 12.°, 15.° (il 16.° è già escluso); 12 modi in tutto]. — Resterebbero per ciascuna figura 9 modi, ma si esclusero ancora:

3.°) I modi della prima figura con la premessa maggiore particolare [9.°, 10.°, 13.°] oppure con premessa minore negativa [2.°, 4.°; dunque 5 modi].

4.°) I modi della seconda figura con entrambe le premesse positive [1.°, 3.°, 9.°] o con premessa maggiore particolare [10.°, 13.°; 5 in tutto].

5°) I modi della terza figura con premessa minore negativa [2°, 4°, 10°;].

6°) I modi 3°, 4°, 10°, 13° della quarta figura [2].

---

1) Non si deve quindi ritenere che vi sieno casi in cui non vi sia conclusione. Alla peggio questa conclusione sarà un'identità e perciò non si avrà una *nuova* verità dalle premesse. Cfr. Schröder op. cit. vol. II. parte 1. p. 361.

2) Queste regole sono contenute nei seguenti versi memoriali

Utraque si praemissa neget, nihil inde sequetur.
Nil sequitur geminis ex particularibis unquam.
Sit minor affirmans nec maior sit specialis (per la I figura)
Una negans esto nec maior sit specialis. (per la II figura).
Sit minor affirmans, conclusio sit specialis. (per la III figura).

Del resto queste regole, in unione a quelle relative alla conclusione - che dicono essere necessario e sufficiente che una delle premesse sia negativa affinchè la conclusione sia tale; e sufficiente che una sia particolare perchè sia tale la conclusione - furono variamente derivate e compendiate nei vari trattatti. Jevons *op. cit.* p. 63-78, Ladd *op. cit.* p. 41. Voigt *op. cit.* p. 37 ecc.

Per verificare che questi modi non dànno una conclusione della forma desiderata, si può trovare di fatto la risultante dal sistema delle premesse col procedimento che s'insegna al § 21; oppure si può, per il momento, accontentarsi della illustrazione grafica: cioè, rappresentando coi simboli euleriani le posizioni reciproche di a, b, x come vengono date dalle premesse, si rileva che la posizione di a in rispetto a b non può essere fissata; e quindi non si può stabilire il giudizio esprimente la loro relazione.

Nella prima figura restano adunque le seguenti quattro combinazioni possibili di premesse:

$$1^{\circ})\ \begin{vmatrix} a \\ a \end{vmatrix},\quad 2^{\circ})\ \begin{vmatrix} a \\ i \end{vmatrix},\quad 3^{\circ})\ \begin{vmatrix} e \\ a \end{vmatrix},\quad 4^{\circ})\ \begin{vmatrix} e \\ i \end{vmatrix}.$$

Dal 1° modo si ricava una conclusione *a*. Diffatti essendo le due premesse

$$x < b \quad e \quad a < x;$$

che si possono anche scrivere

$$x b_1 = o$$

$$a x_1 = 0,$$

moltiplicando la prima per a e la seconda per b_1 ed addendo si ha

$$a b_1 x + a b_1 x_1 = o \text{ cioè}$$

$$ab_1(x + x_1) = 0$$

quindi

$$ab_1 = 0$$

oppure

$$a < b$$

c. v. d. [1])

Con la sostituzione di b_1 per b si ottiene il sillogismo

$$x < b_1$$

$$a < x$$

$$\overline{\phantom{a < b_1}}$$

$$a < b_1,$$

cioè una conclusione *e* dal 3°) modo.

Ponendo *va* per *a* si ottiene dal 1°) modo, il modo 2°) con una conclusione *i:*

1) Più semplicemente, per quanto si dirà al § 21, si ottiene la conclusione, ricavando la risultante totale delle due premesse sommate:

$$b_1 x + ax_1 = 0$$

che suona appunto:

$$b_1 a = 0.$$

$$\begin{array}{c} x < b \\ va < x \\ \hline va < b; \end{array}$$

e dal 3° modo il modo 4° con una conclusione *o:*

$$\begin{array}{c} x < b_1 \\ va < x \\ \hline va < b_1. \end{array}$$

Adunque nei quattro modi possibili, la premessa maggiore, minore e la conclusione sono rispettivamente giudizî rappresentati dalle seguenti lettere

aaa, aii, eae, eio

che si trovano nelle parole memoriali:

Barbara, Darii, Celarent, Ferio.

P. es. « Tutti i corpi celesti che girano intórno al sole appartengono al nostro sistema planetario; alcune comete girano intorno al sole; dunque alcune comete appartengono al nostro sistema planetario » (*Darii*) ». « Nessun uomo nasce schiavo, i negri sono uomini, dunque nessun negro nasce schiavo (*Celarent*) ».

Trasformando le conclusioni *a* ed *e*, per subalternazione, nei giudizî *i* ed *o* si ottengono due modi: *Bar-*

bari e *Celaront* che sono forme più deboli dei modi da cui si derivarono.

Nella seconda figura restano i modi

$$1^{\circ} \begin{vmatrix} a \\ e \end{vmatrix} \quad 2^{\circ} \begin{vmatrix} a \\ o \end{vmatrix} \quad 3^{\circ} \begin{vmatrix} e \\ a \end{vmatrix} \quad 4^{\circ} \begin{vmatrix} e \\ i \end{vmatrix}.$$

Dal 1° modo si ricava una conclusione *e*. Diffatti scrivendo le premesse $b < x$ ed $a < x_1$ nella forma

$$bx_1 = 0$$

$$ax = 0;$$

moltiplicando la prima per *a* e la seconda per *b* ed addendo si ottiene

$$abx_1 + abx = 0$$

cioè

$$ab = 0$$

oppure

$$a < b_1$$

c. v. d.

Scambiando x con x_1 si ottiene dal 3°) modo pure una conclusione *e:*

$$\frac{\begin{array}{c} b < x_1 \\ a < x \end{array}}{a < b_1.}$$

Ponendo *va* per *a*, si ottiene dal 1° modo il modo 2° con la conclusione *o:*

$$\frac{\begin{array}{c} b < x \\ va < x_1 \end{array}}{va < b}$$

e dal 3°, il modo 4°, pure con conclusione *o:*

$$\frac{\begin{array}{c} b < x_1 \\ va < x \end{array}}{va < b_1.}$$

Onde si hanno i modi: a e e (*Camestres*) a o o (*Baroco*) e a e (*Cesare*) e i o (*Festino*).

P. es. « I divertimenti nobili favoriscono la pace dell'animo; i giuochi d'azzardo non favoriscono la pace dell'animo, dunque i giuochi d'azzardo non sono divertimenti nobili. » (*Camestres*).
« La vera arte non è attività meccanica; alcune virtuosità

sono attività meccaniche; alcune virtuosità non sono arte » (*Festino*) [1].

Indebolendo la conclusione *e* in *o*, si hanno le due forme secondarie *Camestres Cesaro*.

I modi della terza figura sono sei:

$$1^{\circ} \begin{vmatrix} a \\ a \end{vmatrix} \quad 2^{\circ} \begin{vmatrix} a \\ i \end{vmatrix} \quad 3^{\circ} \begin{vmatrix} e \\ a \end{vmatrix} \quad 4^{\circ} \begin{vmatrix} e \\ i \end{vmatrix} \quad 5^{\circ} \begin{vmatrix} i \\ a \end{vmatrix} \quad 6^{\circ} \begin{vmatrix} o \\ a \end{vmatrix}.$$

Dal primo si ricava una conclusione i.
Diffatti scrivendo le premesse

$$x < b$$
$$x < a$$

nella forma

$$x = ub$$
$$x = va$$

si ricava

$$va = ub$$

onde

$$va < b.$$

1) LINDNER *op. cit.* p. 76.

Scambiando b con b_1 si ottiene dal modo 3° una conclusione *o*.

$$\frac{\begin{array}{c} x < b_1 \\ x < a \end{array}}{va < b_1.}$$

Ponendo wx in luogo di x [nella prima o nella seconda premessa] si ottengono dal 1° modo il 2°

$$\frac{\begin{array}{c} x < b \\ wx < a \end{array}}{va < b.}$$

ed il 5°

$$\frac{\begin{array}{c} wx < b \\ x < a \end{array}}{wa < b.}$$

Con conclusioni *i*.
Dal 3° modo, il 4°

$$\frac{\begin{array}{c} x < b_1 \\ wa < a \end{array}}{va < b}$$

ed il 6°

$$\frac{\begin{array}{c} wx < b_1 \\ x < a \end{array}}{va < b_1.}$$

Con conclusioni *o*.

Si hanno adunque i modi: a a i (*Darapti*), a i i (*Datisi*), e a o (*Felapton*), e i o (*Ferison*), i a i (*Dimatis*), o a o (*Bocardo*).

P. es. « Alcuni uomini contenti sono poveri, i contenti sono da invidiarsi, dunque alcuni poveri sono da invidiarsi (*Datisi*) ».
« Il potassio è un metallo, il potassio galleggia sull'acqua, alcuni metalli galleggiano sull'acqua (*Darapti*) » [1]).

I modi della quarta figura sono cinque:

$$1^\circ \left|\begin{matrix} a \\ a \end{matrix}\right| \quad 2^\circ \left|\begin{matrix} a \\ e \end{matrix}\right| \quad 3^\circ \left|\begin{matrix} e \\ a \end{matrix}\right| \quad 4^\circ \left|\begin{matrix} e \\ i \end{matrix}\right| \quad 5^\circ \left|\begin{matrix} e \\ a \end{matrix}\right|.$$

1) SCHRÖDER *op. cit.* vol. II, parte 1. p. 237.

Dal 1° si ha una conclusione *i*.
diffatti, scambiando le premesse si ha

$$x < a$$

$$b < x.$$

Donde si ricava, secondo il primo modo nella I figura [con la sostituzione di b per a]:

$$b < a$$

ossia, convertendo:

$$va < b.$$

Analogamente si ottiene una conclusione *e* della 2ª, una *o* della 3ª e dalla 4ª ed una *i* della 5ª combinazione di premesse. Cioè si hanno i modi a a i (*Bamalip*), a e e (*Calemes*) e a o (*Fesapo*) e i o (*Fresison*) i a i (*Dimatis*).

P. es. « Il pipistrello è un mammifero, nessun mammifero depone uova; un animale che depone uova non può essere un pipistrello » (*Fresison*).

« I sali sono combinazioni chimiche, le combinazioni chimiche si possono decomporre, alcuni corpi che si possono decomporre sono sali ». (*Bamalip*).

Scrivendo in luogo della conclusione *e* nel 2° modo, la conclusione *o* si ha il modo più debole *Calemos*.

Le prime tre figure furono trattate completamente già da ARISTOTELE (*Analyt. pr.* I, 4-7). TEOFRASTO vi aggiunse i modi della quarta figura, considerandoli però come modi indiretti (κατὰ ἀνάκλασιν) della prima figura (ALEX. *ad. anal. pr.* f. 27 b [Brandis. p. 188, 4], BOETHIUS, *de syll. cat.* ed. Basilea 1570

p. 594). Sembra che appena GALENO (AVERROÈ, Prior. Resol. I, 8; PSEUDO GALENO in Εἰσαγωγή διαλεκτική pubbl. dal P. Minoides Minas. Parigi 1844, προθεωρία p. 57) ne abbia formata la quarta figura. Le parole mnemoniche *Barbara, Celarent*... compariscono per la prima volta in alcune versioni e rifacimenti della σύνοψις εἰς τὴν Ἀριστοτέλους λογικὴν ἐπιστήμην di Psello, pubblicate nel XIII secolo (GUGLIELMO SHYRESWOOD; PIETRO ISPANO: *Summulae*) colla variante *Camnestres* in luogo di *Camestres* e i nomi *Baralipton, Celantes, Dabitis, Fapesmo, Frises (o) morum* per i modi della quarta figura considerati come indiretti della prima.

I nomi originali greci sono i seguenti:

Γράμματα ἔγραψε γραφίδι τεχνικός per la I.
Γράμμασιν ἔταξε Χάρισι παρθένος ἱερόν per la IV (I indiretta).
Ἔγραψε κάτεχε μέτριον ἄχολον per la II.
Ἅπασι σθεναρὸς ἰσάκις ἀσπίδι ὀφθαλμὸς φέριστος per la III.

In OCCAM (Summa totius logicae c. 3-5) si trovano i modi indeboliti: — Cfr. PRANTL. *Geschichte d. Logik*, vol. III c. XIX).

In questi nomi memoriali, oltre le vocali *a e i o*, anche le consonanti *s, p, c, m*, hanno un significato convenzionale: *s* vuol dire conversione pura (*s*implex), *p* conversione impura (*p*er accidens) *c* contrapposizione della proposizione rappresentata dalla vocale precedente; *m* trasposizione delle premesse (*m*etathesis). Eseguendo queste trasformazioni i modi delle tre ultime figure diventano modi equivalenti della prima figura, e precisamente si riducono a quel modo che ha eguale consonante iniziale; così *B*aroco si riduce a *B*arbara contrapponendo la seconda premessa. A *Barbara* si riduce pure *Bocardo* e *Bamalip* e così via.

Trattando i giudizî particolari colla formula

$$ab > o,$$

per ottenere la conclusione in quelli ove è necessaria una conversione impura (*p*) od una subalternazione, bisogna aggiungere alle due premesse una terza proposizione, cioè un giudizio esistenziale, che ci abiliti a detta trasformazione (Cfr. § 19) [1]). Così per dedurre la conclusione del modo *Darapti:*

---

1) Altrimenti la conclusione è $O = O$, ciò che credo, avvertì pel primo il PEIRCE: Aristotele and De Morgan have particolar conclusion from two universal premises; these are all rendered illogical by the significations which I attach to $\prec$.... (*l. c.* p 22, nota).

$$(1)\ x < b$$

$$(2)\ x < a$$

bisogna aggiungere l'altra premessa

$$(3)\ x > o.$$

Diffatti appena allora dal prodotto delle prime due:

$$x < ab$$

si ricava, *a fortiori*,

$$ab > 0.$$

P. es. dicendo: « le sirene hanno volti umani », « le sirene abitano nel mare » dunque « alcuni esseri che abitano il mare hanno volti umani » si vede benissimo che, affinchè la conclusione fosse vera, bisognerebbe che esistessero le sirene.

I modi *Darapti, Felapton, Bamalip, Fesapo* e tutti i cinque modi indeboliti: *Barbari, Celaront, Cesaro, Camestros, Calemos,* hanno bisogno di un tale giudizio esistenziale in aggiunta alle premesse, per cui devono considerarsi come forme di deduzione affatto diverse dagli altri 15 modi, in cui la conclusione è dedotta dalle sole due premesse enunziate; e che quindi soddisfanno strettamente alla definizione del sillogismo aristotelico: [1]).

Ammettendo nelle due premesse, anzichè le quattro forme *a e i o*, gli otto giudizî (equazioni) di HAMILTON (cfr. § 12, p. 66 nota 1) i numeri dei modi possibili ascende a 36: altre combinazioni si ottengono ponendo le forme di giudizio di DE MORGAN e di HALSTED (§ 12 ibid.). Però con l'aumentare i modi delle figure non si guadagna in fondo un gran che; potendosi molte forme ridurre a pochi tipi con opportune sostituzioni e trasformazioni. Vedemmo come già gli antichi logici cercarono di ri-

---

1) Δῆλον δὲ καὶ ὅτι πᾶσα ἀπόδειξις ἔσται... ἐκ δύο προτάσεων καὶ οὐ πλειόνων. (ARIST. *analyt. pr.* I, 25).

durre i modi delle altre figure a quelli della prima. Una più grande semplificazione fu fatta da Miss Ladd che derivò tutti i 15 modi esatti dal seguente prodotto evanescente:

$$(AB = O)(B_1 C = O)(AC > O) = O,$$

che si deduce dalla relazione

$$(AB = O)(B_1 C = O) < (ABC = O)(AB_1 C = O)$$

$$< [AC(B + B_1) = O];$$

cioè

$$(AB = O)(B_1 C = O) < (AC = O)$$

e riducendo questa subordinazione alla forma evanescente, ricordando che

$$(AC = O)_1 = (AC > O).$$

Basta all'uopo ridurre questo prodotto ad una subordinazione, portando uno dei fattori — negato — come membro maggiore, a destra, e sostituire opportunamente a, b, x in luogo delle lettere da noi scritte in carattere maiuscolo.

Del resto anche il prof. CAYLEY [1]) ridusse tutti i possibili sistemi di premesse pel sillogismo tradizionale ai seguenti sei:

$$(ax = o)(xc = o) \qquad (ax = o)(x_1 c = o)$$

---

1) A. CAYLEY. *Note on the calculus of logic*. Quart. Jour. v. XI p. 182.

$$(ax = o)\ (xc > o) \qquad (ax = o)\ (x_1 c > o)$$

$$(ax > o)\ (xc > o) \qquad (ax > o)\ (x_1 c > o),$$

donde s'imparerà a trarre la conclusione, trattandosi del problema generale dell'eliminazione, al § 21.

I sillogismi ora trattati si chiamano *categorici*, a differenza dei sillogismi *categorico-ipotetici*, nei quali le premesse anzichè relazioni di concetti sono relazioni di giudizî (giudizî ipotetici). Questi sillogismi categorico-ipotetici si distinguono anche nelle medesime figure e nei medesimi modi, di cui si parlò innanzi. Basta porre in luogo dei termini (concetti) a, b, x, le lettere α, β, ξ (esprimenti giudizî). P. es. posto

$$\alpha = A < B$$

$$\beta = C < D$$

$$\xi = M < N$$

lo schema:

$(M < N) < (C < D)$	cioè « quando M è N, C è D »
$(A < B) < (M < N)$	« » A è B, M è N »
$(A < B) < (C < D)$	» A è B, C è D »

sarebbe un modo *Barbara*.

$(C < D) < (M < N)_1$ cioè « quando C è D, non è vero che M è N »

$v(A < B) < (M < N)$ « alle volte se A è B, M è N »

$v(A < B) < (C < D)_1$ « alle volte se A è B, è falso che C è D »

è un *Festino* ecc.

Se nei sillogismi considerati, la premessa minore è un giudizio esistenziale, abbiamo i sillogismi *ipotetici* propriamente detti: P. es.

$\alpha < \beta$ cioè « se è vero α è vero β.

$0 < \alpha$ alle volte α è vero;

$0 < \beta$ alle volte è vero β »

ed anche:

$\alpha < \beta$ « se è vero α è vero β,

$\beta < 1$ β non è sempre vero;

$\alpha < 1$ α non è sempre vero » *(Barbara)*

Son più importanti le forme ove la proposizione esistenziale è universale:

$$\alpha < \beta \qquad \text{« se è vero } \alpha \text{ è vero } \beta \text{ »}$$

$$1 = \alpha \qquad \text{« } \alpha \text{ è (sempre) vero}$$

$$1 = \beta \qquad \text{« } \beta \text{ è vero » }$$ [1]

ed anche:

$$\alpha < \beta \qquad \text{« se vi è } \alpha \text{ vi è } \beta \text{ »}$$

$$\beta = o \qquad \text{« non vi è } \beta \text{ »}$$

$$\alpha = o \qquad \text{« non vi è } \alpha \text{ »}$$ [2] (*Barbara*)

e così per altri modi e figure.

A questa forma ipotetica vengono ricondotti tutti i sillogismi, secondo PEIRCE [3]. Diffatti esprimendo con α

---

1) Questa forma si dice *modo ponente*.
Si noti che la forma simile:

$$\begin{array}{c} \alpha < \beta \\ \beta = 1 \\ \hline \alpha = 1 \end{array}$$

è falsa. Dall'esistenza di una causa si deduce l'esistenza dell' effetto, ma non viceversa: « se piove le strade sono bagnate » « le strade sono bagnate » dunque (?).

2) Questa forma si dice *modo tollente*.
Si noti che la forma

$$\begin{array}{c} \alpha < \beta \\ \alpha = o \\ \hline \beta = o \end{array}$$

è falsa. È vera invece se $\alpha = \beta$. E così anche la forma della nota precedente.

3) PEIRCE *op. cit.* p. 19-20.

il sistema delle premesse, con β la conclusione, ogni sillogismo si riduce alla proposizione

$$\alpha < \beta$$

cioè: poste le premesse (α) si deduce la conclusione (β). Però questa proposizione esprime a rigore di termine l'alternativa: o α è falso, e allora non si deduce niente, oppure è vero ed in allora è vera la β:

$$(a < \beta) = (\alpha = o) + (\alpha > o)\ (\beta > o).$$

Perciò tutti i sillogismi soliti vengono chiamati *dialogismi*, riservando il nome di sillogismo alla conclusione dalle due premesse

$$\alpha < \beta \quad \text{ed} \quad \alpha > o,$$

dove la conclusione $\beta > o$. si deduce senza ambiguità.

Esempî di sillogismi categorico-ipotetici:
Se il testimonio dice la verità, l'imputato si trovava in casa all'ora....;

« Se l'imputato si trovava in casa all'ora...., non si trovava al luogo del delitto » « dunque se il testimonio dice la verità l'imputato non si trovava al posto del delitto » (*Celarent*).

« Se l'acqua è una sostanza semplice essa non è decomponibile; se si può estrarre l'idrogeno dall'acqua, essa è decomponibile; dunque se si può estrarre l'idrogeno dall'acqua, essa non è un corpo semplice. (*Cesare*). » —

ipotetici: « Se v'è destino non v'è providenza; or providenza v'è, dunque non v'è destino » (*Camestres*). « Dissi che saremmo andati in campagna se il tempo era bello, ora il tempo non era bello, dunque non andammo in campagna » (è vera soltanto se la premessa maggiore è un'identità: cioè qualora il bel tempo fosse condizione *necessaria e sufficiente*. Vedi nota 2 pag. 146 ed esercizi). « Alle volte se è vento forte, il piroscafo non parte;

oggi il piroscafo è partito; dunque forse non era vento forte » (*Baroco*).

Nel ragionamento comune spesse volte s'esprimono sillogismi in forma abbreviata. Cioè anzichè dire o scrivere tutt'e due le premesse, ne ommettiamo una. Questa abbreviazione, la quale più che una speciale forma logica è una figura linguistica o rettorica, si chiama entimema [1]; E precisamente entimema di primo o di secondo grado a seconda che la premessa taciuta è la maggiore o la minore. P. es. « L'oro è un corpo semplice, dunque è indecomponibile » è un entimema di primo grado; « Tutti i corpi semplici sono indecomponibili, dunque l'oro è indecomponibile » è entimema di secondo grado. — Talvolta enunciamo ancora la sola conclusione aggiungendovi o premettendovi opportunamente il termine medio, come motivazione p. es. « l'oro, essendo corpo semplice è indecomponibile » Questo si chiama un sillogismo contratto [2].

§ 21. Distinguonsi due specie di sillogismi composti, cioè I) i sillogismi costituiti da giudizî composti, II) quelli formati da più sillogismi semplici.

I. Della prima specie sono i così detti sillogismi congiuntivi, nei quali le premesse sono giudizî congiuntivi. P. es. i categorici:

$$x < bcd\ldots$$

$$a < x$$

$$\overline{\phantom{a < bcd\ldots}}$$

$$a < bcd\ldots$$

oppure

---

1) ἐνθύμημα — in questo senso è adoperato appena da QUINTILIANO. ARISTOTELE indica con questo nome un speciale ragionamento d'induzione dal simile al simile (*Anal. pr.* II, 27).

2) *Syllogismus contractus.*

$$x + y + z \ldots < bcd$$
$$a < x + y + z \ldots$$
$$\overline{}$$
$$a < bcd \ldots \qquad (\textit{Barbara})$$

p. es. « l'oro, l'argento, il platino sono metalli lucenti e preziosi; »
« Quell'orologio da tasca sarà d'oro, d'argento o di platino; »
« Dunque sarà sempre di metallo lucente e prezioso. »

E gl'ipotetici:

$$\xi < \beta\gamma\delta \ldots$$
$$\alpha < \xi$$
$$\overline{}$$
$$\alpha < \beta\gamma\delta \ldots \qquad (\textit{Barbara})$$

Analogamente per gli altri modi e figure.

Sonvi quindi i sillogismi disgiuntivi, nei quali una od ambe le premesse sono giudizî disgiuntivi. P. es.

$$x < b + c + d \ldots.$$
$$a < x$$
$$\overline{}$$
$$a < b + c + d \ldots$$

o l'ipotetico:

$$\xi < \beta + \gamma + \delta \ldots$$
$$\alpha < \xi$$
$$\overline{}$$
$$\alpha < \beta + \gamma + \delta \ldots \qquad (\textit{Barbara})$$

« Se vi è ξ vi è β o γ o δ...
« se vi è α vi è ξ »
« se vi è α vi è o β o γ o δ...: »

E cosi per gli altri modi.
Se la disgiunzione è perfetta, cioè se

$$(1)\ \beta\gamma = \gamma\delta = \delta\beta = o$$

e se la prima premessa è un'identità

$$\xi = \beta + \gamma + \delta \ldots$$

mentre la seconda è un giudizio esistenziale, abbiamo una forma speciale di giudizî ipotetico-disgiuntivi che si dice dilemma, trilemma.... polilemma a seconda che i termini della somma disgiunta ($\beta + \gamma + \delta$...) sono due, tre o più.

Ecco dei trilemmi:

$$\frac{\begin{array}{l}\xi = \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha + \beta + \gamma = o\end{array}}{\xi = o} \qquad \frac{\begin{array}{l}\xi = \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha = 1\end{array}}{\begin{array}{c}\beta + \gamma = o\ [ex\ (1)] \\ \xi = 1.\end{array}} \qquad \frac{\begin{array}{l}1 = \xi = \alpha + \beta + \gamma \\ \alpha = \beta = o\end{array}}{\gamma = 1 \quad \text{etc.}}$$ [1])

« P. es. Se questo mondo non fosse il migliore (ξ_1) Dio o non avrebbe conosciuto (α) o non avrebbe potuto (β) o non avrebbe

....

1) Si osservi che la condizione (1) è necessaria solamente in alcune somme, p. es. nel secondo trilemma citato. — La prima si riduce al solito *modus tollens*, la seconda può dirsi *modus ponendo-tollens* (afferma α, nega β e γ), la terza modus *tollendo-ponens* (nega α e β, afferma γ).

voluto (γ) creare il miglior mondo. Ora nessuno di questi casi è vero (a cagione dell'onniscienza, onnipotenza e somma bontà di Dio), dunque questo mondo è il migliore fra tutti i mondi possibili, cioè $\xi_1 = o$, quindi $\xi = 1$. — (LEIBNIZ) [1]. »

« Due rette sono sempre fra loro parallele o convergenti; ma due rette che abbiano tutti i loro punti rispettivamente equidistanti sono parallele, dunque due rette che abbiano tutti i loro punti sispettivamente equidistanti non sono convergenti (CANTONI) [2]. »

Ancora possiamo qui annoverare le forme miste, nelle quali le premesse sono giudizî misti. La varietà di queste forme è stragrande, ma troppo facile a dedursi dallo schema generale del sillogismo categorico, con sostituzione di espressioni più complicate (polinomî, somme disgiunte) alle tre lettere semplici a b x oppure α β ξ (per gl'ipotetici). Basta averne accennata l'indole e la classificazione.

II. Alla seconda specie di sillogismi composti appartengono quelli formati da più sistemi di premesse ossia da più sillogismi semplici. I sistemi possono essere o simultanei (congiuntivi) o alterni (disgiuntivi) ovvero misti. I primi sono i più importanti. P. es. da due sillogismi del modo *Barbara:*

$$
(1) \qquad \begin{array}{ccc} x < y & \text{e} & z < b \\ a < x & & y < z \\ \hline a < y & & y < b \end{array}
$$

1) Cfr. LINDNER *op. cit.* p. 93.

2) CANTONI *Corso elementare di filosofia*, Milano, Hoepli, 1891 vol. I p. 204.

ottengo due conclusioni $a < y$, $y < b$ che danno per risultato $a < b$ (*Barbara*).

Oppure dalla congiunzione delle premesse in un solo sistema, ottengo la forma

(2) $z < b$ ovvero, disponendo altrimenti le premesse: 3) $a < x$

$$\begin{array}{l} z < b \\ y < z \\ x < y \\ a < x \\ \hline a < b \end{array} \qquad \begin{array}{l} a < x \\ x < y \\ y < z \\ z < b \\ \hline a < b. \end{array}$$

La conclusione $a < b$ può anche ricavarsi dalle forme contratte:

(4)
$$\begin{array}{l} a < y \text{ a causa di } x \\ y < b \text{ a causa di } z \\ \hline a < b. \end{array}$$

I sillogismi del tipo 1) si dicono *polisillogismi*, quelli del tipo 2) *soriti progressivi* o gocleniani [1]), del tipo 3) *soriti regressivi o aristotelici*, del tipo 4) *epicheremi*. Sostituendo α, β, ξ, η, ζ, per a, b, x, y, z abbiamo gli analoghi sillogismi composti ipotetici. — Possono darsi molte varietà di polisillogismi e soriti (cfr. Esercizî),

1) Inventati da Goclenio (1547-1628).

ma tali sillogismi composti possono considerarsi in generale come un sistema di più relazioni logiche (premesse, nel nostro caso le 4 esposte alla forma 2); dalle quali eliminando successivamente più quantità (termini medî, nel nostro caso 3: x, y, z), si ottiene una relazione fra le quantità rimanenti (nel nostro caso a e b): che è la conclusione. A seconda che si enuncia il resultato di ogni singola eliminazione, oppure si eseguiscono contemporaneamente tutte le eliminazioni, si danno i varî tipi 1, 2, 3, e 4.

Esempî. Qui prudens est, et temperans est; qui temperans est, et constans; qui constans est, et imperturbatus; qui imperturbatus est, sine tristitia est; qui sine tristitia est beatus est — ergo qui prudens est et beatus est (Tipo 3) [1])

« Il premio desta il desiderio, ma il desiderio produce la me- « ditazione, il premio dunque produce la meditazione ».

« La meditazione crea le arti e le migliora, ma il premio « produce la meditazione; il premio dunque produce le arti e « le migliora ».

« Le arti ed i loro miglioramenti ci danno di molte derrate « e manifatture; ma il premio crea le arti e le migliora: il « premio dunque ci dà l'aumento delle derrate e delle mani- « fatture ».

« L'aumento delle derrate, e delle manifatture rende ricca la « nazione; ma il premio ci dà l'aumento delle derrate e delle « manifatture; il premio dunque rende ricca la nazione ». (Tipo 1) [2])

« Se vuoi vivere agiatamente, devi saper lavorare, per guadagnare del danaro ».

« Se devi saper lavorare, devi essere diligente, giacchè devi imparare un mestiere ».

« Perciò se vuoi vivere agiatamente, devi essere diligente. — *modus ponens* — oppure « Non sei diligente, dunque non vivrai mai agiatamente » *modus tollens* (Tipo 4 ipotetico). [3]).

1) SENECA, *ep.* 85.

2) GALUPPI. *Elementi di Filosofia*, Milano, Silvestri, 1866 vol. I, p. 100.

3) LINDNER. *op. cit.* p. 102.

I sistemi di premessa disgiunti o misti hanno meno importanza nella pratica, e, ad ogni modo, lo studio dei medesimi rientra nel problema più vasto che è quello di eliminare un qualsivoglia numero di termini da un sistema comunque dato di relazioni logiche. Basta all'uopo saper eliminare *un* termine — poniamo x — perchè nel medesimo modo che si eliminerà queste si potranno successivamente eliminare quanti altri termini, y, z ecc., si vogliano.

Questo problema fu risolto. [1]) Diffatti potendosi ridurre il sistema delle premesse alla forma:

$$\Sigma(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)$$

ove ciascuno degli α — giudizî elementarî monomî. *es.* al § 16 — può non avere od avere l'accento della negazione e quindi può essere un giudizio elementare ad un rilievo universale o particolare; il medesimo sistema di premesse avrà la forma

$$\Sigma\Pi(A_k = o)\ \Pi\ (A_i > o),$$

ove sono scritti prima tutti gli α non accentati $[\alpha_k = (A_k = o)]$ e quindi gli α accentati $[\alpha_i' = (A_i > o)]$.

---

1) Dal prof. SCHRÖDER *Über das Eliminations problem in identischen Kalkul.* Tagblatt der 58. Versammlung dentscher naturforscher und Aerzte in Strassburg. 1885 p. 353 e segg.

Ma, per un teorema noto (Cfr. *es*. al § 16), un prodotto di giudizî universali può ridursi ad un solo giudizio elementare:

$$[\Pi\,(A_k = o)] = [\Sigma(A_k) = o].$$

Denotando il polinomio $\Sigma(A_k)$ con A avremo il sistema delle premesse ridotto alla forma

$$\Sigma[(A = o)\ \Pi\ (A_i > o)].$$

Onde sviluppando A ed A_i per x, cioè ponendo

$$A = ax + bx_1$$

$$A_i = p_i x + g_i x_1 .$$

si ha

$$(1) \qquad \Sigma[(ax + bx_1 = o)\ \Pi\ (p\,x + q_i x_1 > o)]\ ^{1)}.$$

ed il resultato dell'eliminazione di x è

$$(2) \qquad \Sigma[(ab = o)\ \Pi\ (p_i a_1 + q_i b_1 > o)]\ ^{2)}.$$

1) Questa forma generale del sistema delle premesse fu data da Mitchell (*Studies in logic* by members of the John Hopkins University etc. nello studio « On a new algebra of logic » p. 72-106.

2) Schröder, op. cit. vol. II parte 1. p. 209).

La dimostrazione si darà negli esercizî.

Come casi speciali più semplici, si osservi che qualora il sistema dato consti di soli giudizî particolari, cioè a = b = o, la risultante è

$$\Sigma\ \Pi\ (p_i + q_i > o),$$

se consta di soli giudizî universali la risultante è

$$\Sigma(ab = o).$$

E più specialmente ancora, se abbiamo un solo giudizio elementare, particolare ed universale, cioè A = o oppure A > o, abbiamo dall'eliminazione di x le seguenti relazioni:

da $$ax + bx_1 = o; \quad ab = o$$

da $$ax + bx_1 > o; \quad a + b > o.$$

Esercizî e problemi. Al § 19. 69) Dal giudizio elementare

$$\Sigma(abc) = abc + abc_1 + a_1bc + a_1b_1c_1 = o$$

si passa, mediante la negazione all'altro

$$[\Sigma(abc)]_1 = (a_1 + b_1 + c_1)\ (a_1 + b_1 + c)\ (a + b_1 + c_1)\ (a + b + c) = 1$$

Eseguendo le moltiplicazioni si ha

$$ab_1c + ab_1c_1 + a_1bc_1 + a_1b_1c = 1$$

ciò che, del resto, s'otteneva direttamente combinando la relazione data collo sviluppo dell'1 per i tre argomenti a, b, c.

70) Dal giudizio « alcuni animali acquatici (*a*) non sono pesci (*p*); e tutti i pesci sono animali acquatici » rappresentato dal sistema

$$(1)\ a p_1 > o$$

$$(2)\ a_1 p = o$$

si ottiene, negando la (1) ed in virtù della (2):

$$p + a_1 > 1$$

« i pesci e gli animali che non vivono nell'acqua non sono tutti gli animali possibili ».

71) Per avere la negazione di un giudizio composto $f(\alpha_1\ \alpha_2\ a_2)$ basta ridurlo alla forma $\Sigma(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_2)$; e, per un ragionamento analogo a quello fatto per i concetti, la negazione di $f(\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n)$ sarà il termine complementare di $\Sigma(\alpha_1\ \alpha_1\ \ldots\ \alpha_n)$ per lo sviluppo dell'1 per codesti α.

Ad esempio, la negazione del giudizio « vi è α_1 assieme ad α_3 oppure non v'è α_2 »:

$$\alpha_1\alpha_3 + \alpha'_2 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha'_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha'_2\alpha'_3 + \alpha'_1\alpha'_2\alpha_3 + \alpha'_1\alpha'_2\alpha'_3$$

sarà: $$\alpha_1\alpha_2\alpha'_3 + \alpha'_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha'_1\alpha_2\alpha'_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha'_2 + \alpha'_1\alpha_2$$

cioè: « o v'è α_1 ed α_3 e non v'è α_3, oppure v'è α_2 ma non v'è α'_1 ».

72) Siasi osservato che i fenomeni a, b, c, avvengono solamente nelle combinazioni abc_1, $a_1 b_1 c$, $a_1 b_1 c_1$. Quali sono i più semplici giudizî che si possono enunciare intorno ad a, b, e c?
— *Risp.* a = b ed ac = o — (JEVONS). Si dimostri.

73) Si diano esempî di inversioni di giudizî *a, e, i, o.*

74) Se nessun *a* è *bc*, che segue rispetto *b* ed *ac* — *Risp.* nessun b è ac' — (JEVONS).

75) Dimostrazione che la risoluzione generale dell'equazione

$$f(x) = o$$

per x, è

$$x = f(o)\, u_1 + f_1(1)\, u.$$

dove u ha un valore qualunque.

Dall'equazione data

$$f(x) = f(1).\ x + f(o).\ x_1 = o$$

si ha, per un teorema noto:

$$(1)\quad f(1).\ x = o$$

e

$$(2)\quad f(o).\ x_1 = o.$$

Moltiplicando la (1) per f(o) e la (2) per f(1) ed addendo:

$$f(1).\ f(o).\ x + f(o).\ x_1 = o$$

cioè

$$f(1).\ f(o) = o. \qquad \text{(BOOLE)}$$

Codesta equazione si dice risultante o risultato dell'eliminazione di x dall'equazione data; e chiamandosi soluzione quel valore che posto per x nell'equazione data, la riduce alla risultante, è chiaro che

$$x = f(o)\, u_1 + f(1)_1\, u \qquad \text{(Boole)}$$

è *una* soluzione, perchè è

$$f(1).\left(f(o)\, u_1 + f(1)_1\, u \right) + f(o) \left(f(o)\, u_1 + f(1)_1\, u \right)_1 =$$

$$= f(1) \left(f(o)\, u_1 + f(1)_1\, u \right) + f(o) \left(f(o)_1 + u \right)\left(f(1) + u_1 \right) =$$

$$= f(1)\, f(o)\, u_1 + f(1).\, f(o)\, \bar{u} = f(1).\, f(o) = o \text{ c. v. d.}$$

Si mostra anche facilmente che *ogni* soluzione ha codesta forma. Diffatti sia *y* una soluzione, allora dovrà essere, soddisfacendo y all'equazione data:

$$f(1)\, y + f(o)\, y_1 = o$$

cioè

$$(1) \ldots f(1)\, y = o$$

$$\text{e } (2) \ldots f(o)\, y_1 = o$$

Ora posso scrivere

$$y = f(1)\, y + f(1)_1\, y$$

per la (1):

$$y = f(1)\, y_1$$

e per la (2),

$$y = f(o)\, y_1 + f(1)\, y_1.$$

Così y è ridotto alla forma voluta, ove in luogo del valore arbitrario u si scrive y stesso. Assegnando ad u valori speciali si hanno tante soluzioni singolari: però mentre l'equazione data è equivalente alla affermazione simultanea della risultante e della soluzione generale, non lo è se in luogo di quest'ultima si mette una soluzione singolare. —

Al § 20. 76) Dare esempî per tutti i modi delle cinque figure sillogistiche.

77) Ridurre a sillogismi completi i seguenti sillogismi contratti:

« Beati i misericordiosi perchè ad essi sarà fatta misericordia » ecc. (Math. V).

« Alcuni poemi non sono veri perchè non sono belli ». « Le crociate non erano pazzie perchè avevano origine da un grande entusiasmo religioso » (Lindner).

« Poichè egli fu educato fra zotici non può conoscere gli usi della buona società ». « La riforma fu seguita da molti disordini: ella dev'essere condannata ». (Bain) — 1ª figura.

« La virtù non è una vana immaginazione, poichè l'uomo la può esercitare nella vita » (Schiller). « Alcune ipotesi non portano in sè gl'indizî della verità, poichè esse non sono semplici. » « Gli Unni non sono un popolo colto, poichè non avevano dimora stabile » (Lindner). « Se una regola è una legge che ammette delle eccezioni e un principio è una legge che non ne ammette, concludere che una legge può essere qualcosa di diverso da un principio » (Spalding) — 2ª figura.

« Alcuni Pagani insegnavano verità, che erano assai simili alle dottrine cristiane, specialmente i filosofi greci ». « Alcuni scritti ameni, specialmente certi romanzi, sono dannosi ». « Alcuni uccelli non volano; così gli struzzi » (Lindner) — 3ª figura.

78) Dove sta l'errore nelle seguenti conclusioni?

« Tu non sei ciò che son io »,

« Io sono un uomo ».

« Tu non sei un uomo ». (Arnauld).

« Tutte le stelle fisse scintillano; quella è una stella fissa perchè scintilla ». « Tutte le piante hanno tessuto cellulare, nessun animale è pianta, nessun animale ha tessuto cellulare ». (BAIN).

79) Ricondurre gli esempî dati per i modi della 2ª, 3ª, 4ª ai corrispondenti modi della 1.ª

80) Dare esempî di sillogismi categorico-ipotetici.

81) » » » ipotetici.

Al § 21. 82) Dare esempî di sillogismi congiuntivi e disgiuntivi.

83) Dare esempî di dilemmi, trilemmi e polilemmi.

84) » » di polisillogismi e quindi ridurli a soriti [1]) e ad epicheremi [2]).

Si osservi che se un polisillogismo comincia con un sillogismo della 1ª, 2ª o 4ª figura può continuarsi secondo la 1ª e la 3ª figura. Uno della 3ª può continuarsi solamente con un altro della terza [3]).

85) Dimostrazione che la eliminazione di x dal sistema di relazioni, ridotto alla forma

$$\Sigma\ [(ax + bx_1 = o)\ \Pi\ (p_i\, x + q_i\, x_1 > o)]$$

dà per risultante:

$$\Sigma\ [(ab = o)\ \Pi\ (p_i\, a_1 + q_i\, b_1 > o)].$$

Si dimostra in primo luogo che la risultante di

$$(ax + bx_1 = o)\ (p_i\, x + q_i\, x_1 > o)$$

1) Da σωρός cumulo: ritiensi inventato da EUBOLIDE, filosofo della scuola di Megara. E non va confuso col σωρείτης, argomentazione capziosa di cui parla CICERONE (*De Div.* II, 4. — *Acad.* II, 29, 92).

2) ἐπιχείρημα; in questo senso da QUINTILIANO (V 10); mentre ARISTOTELE (*Top.* VIII, 11) usa questo vocabolo nel senso di tentativo (da ἐπιχειρεῖν) di ragionamento.

3) Vedi LINDNER *op. cit.* p. 99-106.

è $$(ab = o)\ (p_i a_1 + q_i b_1 > o).$$

Diffatto, essendo, in forza dell'equazione $ax + bx_1 = o$,

$$ax = o$$

$$bx_1 = o$$

cioè

$$x < a_1$$

$$x_1 < b_1$$

onde:

$$p_1 x < p_1 a_1$$

$$q_i x_1 < q_i b_1$$

moltiplicando l'ineguaglianza rispettivamente per p_i e q_i. Addendo si ottiene:

$$p_i x + q_i x_1 < q_i a_1 + q_i b_1.$$

Poichè il membro a sinistra è $> o$, sarà a fortiori

$$q_i a_1 + q_i b_1 > o.$$

Dall'esercizio 75) si ha ancora che

$$[(ax + bx_1) = o] < [ab = o];$$

Pertanto è:

$$(ax + bx_1 = o)\,(p_i x + q_i x_1 > o) < (ab = o)\,(p_i a_1 + q_i b_1 > o).$$

Assegnando ad *i* i valori 1, 2, ... e moltiplicando le relazioni che si ottengono sostituendo $p_1 q_1$, $p_2 q_2$ . . . . per $p_i q_i$ nella formola or dedotta, si ottiene:

$$[(ax + bx_1 = o)\ \Pi\ (p_i x + q_i x_1 > o)] < [(ab = o)\ \Pi\ (p_i a_1 + q_i b_1 > o)]$$

ed estendendo questo teorema a più termini di codesta forma, ed addendo:

$$\Sigma[(ax + bx_1 = o)\ \Pi\ (p_i x + q_i x_1 > o)] < \Sigma[(ab = o)\ \Pi\ (p_i a_1 + q_i b_1 > o)]$$

c. v. d. [1]).

---

1) Bisogna osservare che il risultato dell'eliminazione così ottenuto non è completo se non coll'aggiunta di una certa *clausola*. Su di ciò cfr. Schröder *op. cit.* Vol. II parte 1. p. 210-216, 371-400.

CAP. V.

Dottrina delle leggi del pensiero

---

§ 22. Le leggi del pensiero in generale:
loro funzione nella logica e metodo dello studio delle medesime
§ 23. Leggi delle quantità logiche universali,
particolari ed individuali
§ 24. Leggi delle relazioni delle quantità logiche
§ 25. Leggi delle operazioni colle quantità logiche

§ 22. La dottrina delle forme elementari potè essere sviluppata logicamente dalla definizione del concetto, soltanto assumendo alcuni principî assiomatici, nel trattare delle quantità logiche in sè e nelle lòro relazioni ed operazioni.

Queste verità assiomatiche, p. es. quelle del principio d'identità « *a* è eguale ad *a* » o quella del principio di contraddizione « *a* non è non-*a* » furono sin dai tempi antichi [1]) riconosciute ed affermate più o meno esplicitamente come evidenti, indimostrabili. Ciò nulla ostante in una logica rigorosa bisogna sottoporle ad una critica per misurare la portata e la forza restrittiva delle medesime. Essendo che da considerazioni puramente logiche non si possano affermare, sibbene s'aggiungano come dati incontrastabili dell'esperienza — e quindi di natura psicologica od ontologica — i quali limitano la generalità di una logica assoluta, più vasta ed indipendente da essi [2]). Precisamente

---

1) Secondo il PRANTL (*op. cit.* vol. I. p. 562) furono citati espressamente come ἀρχαὶ λογικαί da GALENO (*Therap. meth.* I, 4, X p. 36); però sono conosciuti già da ARISTOTELE — vedi le note seguenti — e forse prima.

2) Prescindendo dalle idee vaghe di una *logica fidei* accanto alla *logica naturalis*, che sorgono assieme alla dottrina della doppia verità nella filosofia araba e che si comunicano agli Scolastici, a cominciare da Roberto HOLKOT (✝ 1349), credo che pel primo appena il BOOLE (*An investigation of the laws of thought*, p. 50 nota) abbia esaminato seriamente la possibilità di una logica, basata su principi diversi da quelli della logica umana.

come gli assiomi euclidei fondano la *nostra* geometria, che apparisce come un caso speciale della geometria non-euclidea.

Questi principî assiomatici si chiamano leggi del pensiero: e ci esprimono delle verità materiali, che sembrano intimamente inerenti alla costituzione della mente umana e che, essendo i primi dati relativi al contenuto i quali s'aggiungono alle pure forme del pensiero, già studiate, segnano il passaggio di quella parte della logica, che considera queste pure forme (Dottrina delle forme elementari) a quella che studia tali forme come racchiudenti contenuti reali (Dottrina delle forme sistematiche). Si esamineranno le leggi del pensiero nel medesimo ordine, col quale esse comparvero nello sviluppo delle forme logiche elementari. Queste si possono ridurre a tre tipi: 1) Quantità logiche per sè — rappresentate da lettere: a, α... — cioè concetti in senso lato, nei quali si comprendono tanto i concetti, che i giudizî ed i sillogismi ed in generale tutte le forme logiche considerate in sè, come elementi (quindi concetti di un concetto, d'un giudizio ecc. 2) Relazioni di quantità logiche — rappresentate dai segni $<$, $>$, $=$ ecc. — cioè giudizî in senso lato: quindi relazioni di concetti, relazioni di giudizî ovvero relazioni di 2.° grado...... relazioni di grado n.^{mo} 3) Operazioni colle quantità logiche, cioè sillogismi in senso lato. (Cfr. § 17). — Pertanto si tratterà partitamente delle leggi delle quantità logiche, di quelle delle relazioni di quantità logiche e di quelle delle operazioni con quantità logiche.

§ 23. *Leggi delle quantità logiche.* I. Principio d'identità; « ogni quantità logica è eguale a sè stessa [1]).

$$A = A.$$

A seconda che con A s'intende un concetto od una proposizione il principio suonerà: « Ogni oggetto del pensiero è eguale a sè stesso » oppure « Due proposizioni esprimenti la stessa relazione fra gli stessi oggetti del pensiero sono fra di loro identiche ».

Se nella nostra mente non consideriamo altro che i due termini 1 e 0, non posso eguagliarli fra loro, ma solo eguagliare uno a sè stesso:

$$1 = 1 \qquad 0 = 0.$$

« L'essere è essere »; « Il non essere è non essere »: o, per i giudizî, « il vero è vero », « il falso è falso ».

La copula « *è* » va intesa come espressione di perfetta eguaglianza e si segna « = » significando che con un termine penso anche l'altro eguale e viceversa; oppure che posso porre sempre uno in luogo dell'altro.

II. Principio di contraddizione. Data una quantità logica A, dalle tre equazioni definienti la sua negazione A_1:

1) $AA_1 = 0$

1) Δεῖ πᾶν τὸ ἀληθὲς αὐτὸ ἑαυτῷ ὁμολογούμενον εἶναι πάντῃ ARISTOTELE *anal. pr.* I, 32.

2) $A + A_1 = 1$

3) $A = (A_1)_1$ [1])

cioè — per i concetti:

1) « Non vi è niente che sia ad un tempo un dato oggetto logico e la negazione del medesimo oggetto » [2])

2) « Ciò che è un dato oggetto logico e ciò che non lo è costituiscono tutto il pensabile »

3) « La negazione della negazione di un dato oggetto è l'oggetto medesimo »

— e per i giudizî:

1) « Due proposizioni una affermante, l'altra negante la medesima relazione fra gli stessi oggetti del pensiero non possono essere mai contemporaneamente vere »

2) « Le medesime proposizioni non possono essere mai contemporaneamente false »

3) « Se è falsa l'una è vera l'altra, e viceversa »;

scaturisce il principio generale della contraddizione, che suona:

« Di due proposizioni, l'una affermante l'altra negante una stessa relazione fra gli stessi oggetti del pensiero, una è necessariamente vera e l'altra falsa » [3]).

Vi sono tre leggi speciali a cui s'applica questo principio, assumendo certe relazioni come vere e quindi ritenendo falso ogni giudizio che alla negazione della medesime perviene [4]).

....

1) Lo SCHRÖDER (*op. cit.* vol, I, p. 345 segg.) considera già queste tre equazioni come l'espressione delle leggi di contraddizione — la 1) —, del terzo escluso — la 2) — e della doppia negazione: *duplex negatio affirmat* — la 3) —.

2) Τὸ αὐτὸ ἅμα ὑπάρχειν καὶ μὴ ὑπάρχειν ἀδύνατον τῷ αὐτῷ καὶ κατὰ αὐτό. ARISTOTELE *metaph.* IV, 3.

3) VOIGT, *op. cit.* p. 85.

4) così la falsità è sempre relativa: senza una « *dictio* » non c'è « *contradictio* ».

Queste leggi sono:

1) La legge di contraddizione valevole per i concetti ed i giudizî universali, che suona:

$$1 > 0.$$ [1]

« Il campo del pensabile non è nullo »;

Se non si dasse un campo del pensabile, non esisterebbe nessun pensiero, per le definizioni dell'1:

$$A \leqq 1.$$

Ciò che equivale a dire « A non è non-A ».
Diffatti se fosse

$$A = A_1$$

sommando e moltiplicando l'equazione per A si avrebbe

$$A = A + A_1$$

$$A = AA_1$$

onde:

$$A + A_1 = AA_1$$

---

1) Nell'esposizione fino al § 24 si segue sempre il VOIGT, *op. cit.* p. 13-14, 22-25, 32, 38-39.

ossia

$$1 = 0$$

c. v. d.

Ogni proposizione universale falsa, cioè incompatibile con un'altra vera, dà per risultante la negazione di questa legge, ossia il giudizio assurdo

$$1 = 0.$$

P. es. se vale la

$$xa + x_1 b = 1$$

non potrà essere vera la

$$xa_1 + x_1 b_1 = 1.$$

Essendo che, moltiplicate l'una per l'altra, dànno.

$$(xa + x_1 b)(xa_1 + x_1 b_1) = 1$$

cioè

$$0 = 1.$$

Essendo *a* una quantità qualunque, per la definizione dell' 1 e dello 0 potranno essere vere le relazioni

$$a = 1,\ a < 1,\ a > 0,\ a = 0$$

e, per la definizione di a_1, rispettivamente sarà

$$a_1 = 0,\ a_1 > 0,\ a_1 < 1,\ a_1 = 1.$$

Se a è, invece, una quantità *reale* (non evanescente) potranno essere vere solamente le tre relazioni

$$a = 1,\ a < 1,\ a > 0$$

e quindi

$$a_1 = 0,\ a_1 > 0,\ a_1 < 1$$

ed a_1 sarà una quantità *parziale*.

Saranno adunque false le relazioni

$$a = 0,\ a_1 = 1.$$

Adunque:

Per i concetti ed i giudizî particolari, che si basano sulle quantità reali (cfr. § 16), oltre alla legge precedente — $1 > 0$ — per la quale è falso che $a = a_1$, vale la

2) Legge di contraddizione che dice: sonvi alcune quantità non nulle ovvero sia tali che debbano considerarsi come reali:

$$a > 0$$

— ed è falso che una di tali quantità sia eguale a zero; — ciò che equivale all'affermare che, se *a* è una quantità reale, i due giudizî

$$a < b \text{ ed } a < b_1$$

non possono essere entrambi veri; cioè almeno uno dev'essere falso.

Diffatti da

$$(a < b)\ (a < b_1) = (ab_1 = o)\ (ab = o),$$

sommando, si ha

$$ab_1 + ab = o \text{ ossia } a = 0$$

contro la legge:

$$a > 0.$$

Ogni giudizio particolare falso ha per risultante la negazione di questa legge, o della precedente.

Se *a* è un concetto individuale, esso non potrà stare in II relazione con verun altro: e perciò, dato un altro concetto *b*, ne sarà compreso od escluso: per tanto sarà:

$$ab = a \text{ ed } ab_1 = o$$

oppure

$$ab_1 = 0 \text{ ed } ab = o,$$

onde: dei due giudizî $ab = 0$ ed $ab_1 = 0$; cioè $a < b_1$ ed $a < b$ almeno uno sarà vero, cioè non potranno entrambi essere falsi:

Per i concetti e giudizî individuali, oltre alle due leggi precedenti, vale la

3) Legge di contraddizione che dice: « *a* è *b* » oppure « non è *b;* » nè vi è altro caso possibile [1]).

Ogni giudizio individuale falso si riduce alla negazione di questa legge o delle due precedenti.

§ 24. I principî suesposti regolano la proprietà delle quantità logiche per sè stesse: ma dessi non bastano alla formazione dei giudizî, non potendo esprimere le relazioni fra le quantità logiche.

Diffatti in forza dei medesimi si può collegare una quantità data *a* con la stessa:

« $a = a$ » (legge d'identità)

con la sua negazione a_1:

1) Legge del terzo escluso, cioè « *principium exclusi tertii sive medii inter duo contradictoria* ». Cfr. Aristotele. *de cat.* 10.

$$« (a = a_{1})_{1} » \qquad \text{(1ª legge di contraddizione)}$$

e coi simboli 1, 0:

$$« (a = 0)_{1} » \qquad \text{(2ª legge di contraddizione)}$$

mediante i segni dell'identità e delle non-identità;

Oppure (per la 2ª e 3ª legge di contraddizione) si può dire che *uno* dei due giudizî

$$a < b \qquad \text{ed} \qquad a < b_{1}$$

è vero, ma non si può stabilire quale sia vero e quando lo sia.

Per ciò si richiede un altro principio che ci abiliti all'uso del segno della subordinazione, insegnandoci quando lo possiamo porre fra due quantità date e quando no. A seconda che il segno della subordinazione sarà frapposto tra due concetti o tra due relazioni questo principio si chiamerà legge di modalità o legge di causalità; però, potendosi considerare sì i concetti che le relazioni come quantità logiche, le due leggi suddette non saranno che due diversi aspetti di un solo principio, che si dice principio della ragion sufficiente; il quale ci abilita a formare le relazioni tra le quantità logiche.

Le due leggi di modalità e di causalità, c' insegna la metafisica, suonano

« Ogni modo ha una sua sostanza »

ed

« Ogni effetto ha una sua causa ».

Se *a* esprime la sostanza o la causa e *b* il relativo modo od effetto possiamo porre, per la definizione della subordinazione, il segno $<$ fra i due, e dire:

$$a < b$$

cioè « a è b » oppure « se vi è *a* vi è *b* ».

Ma da pure considerazioni logiche, quando ciò sia, non possiamo escogitare; dobbiam quindi sempre riferirci ad un motivo d'altra natura (metafisico o psicologico) che ne induca a riconoscere gli effetti di certe cause, o ad attribuire certe proprietà alle cose; onde la necessità di detto motivo, sia desso tratto dall'esperienza o dall'intelligenza — ed il principio della ragion sufficiente:

« Non ammettere nel tuo pensiero alcuna cosa senza fondamento ».

Disse chiaramente il Leibniz: « Ce principe est celui d'une raison suffisante pour qu' une chose existe qu' un événement arrive, qu' une verité ait lieu ».

Essendo le subordinazioni di proposizioni la base del sillogismo (potendosi questo ridurre alla forma $\alpha < \beta$: se vale α, il sistema di premesse, vale la conclusione β. Cfr. § 20) il suesposto principio, che ogni subordinazione costringe, sarà essenziale anche pel sillogismo: e, tenendo conto delle leggi susseguenti riferibili alle operazioni con le quantità, apparirà come principio di inferenza (illazione), in forza del quale da un sistema

di premesse si potrà ritrar conclusioni: come che dalle verità di alcune proposizioni (cause) ne consegua la la verità d'altre (effetti).

Questo principio fu variamente formulato [1]) e la illazione fu ricondotta alla regola del « *dictum de omni* » (« *Quidquid valet de omni valet etiam de quibusdam et de singulis* » oppure « *Quidquid valet de genere valet etiam de specie* ») oppure del « *nota notæ* » (« *nota notæ est nota rei* » ovvero « *prædicatum prædicati est quoque prædicatum subiecti* ») ciò che, ricordando il significato di « nota », « predicato » ecc., equivale al dire: una quantità maggiore di un'altra, è anche (*a fortiori*) maggiore di una minore di quest'ultima, cioè

$$(b > c)\ (c > a) < (b > a):$$

locchè costituisce lo schema *Barbara:* ovvero può ridursi al principio di sostituzione, scrivendo i giudizî equivalenti:

$$(1)\ c = bc \qquad e\ (2)\ a = ac$$

quindi

$$a = abc$$

avendo posto nella (2) per c il valore bc dato dalla (1).

1) ARISTOTELE lo enunzia così: ὅσα κατὰ τοῦ κατηγορουμένου λέγεται πάντα καὶ κατὰ τοῦ ὑποκειμένου ῥηθήσεται *cat.* 5. Cfr. anche *anal. pr.* I, 1. Il MILL (*op. cit.* vol I. p. 207 seg.) propende per la medesima formulazione del principio: mentre il BAIN (*op. cit.* vol. I p. 57) è più favorevole al « *dictum de omni* », il quale era ritenuto anche da AVICENNA (Pseud. Averroè. *Ques. in Prior. Resol.* f. 363 v. B. — PRANTL) come il solo giudizio categorico. — Secondo LAMBERT (*Neues Organon.* Parte I, cap. IV § 229 e seg.) a ciascuna delle quattro figure sillogistiche corrisponde un assioma speciale e cioè: alla I, il *dictum de omni;* alla II il *dictum de diverso;* alla III il *dictum de exemplo* ed alla IV il *dictum de reciproco*, Cfr. LINDNER *op. cit.* p. 72-80.

Lo schema del sillogismo *Barbara* è posto come principio dallo SCHRÖDER (*op. cit.* vol. I. p. 170 segg.) e sotto il nome di « transitiviness of the copula » da DE MORGAN (*On te syllogism*, N II, 1850, p. 104) e da PEIRCE (*op. cit.* p. 25. — HAMILTON e JEVONS adottano il principio della sostituzione,

Però, giova osservare, questa motivazione è relativa; poichè il motivo ha pur bisogno d'essere motivato da un altro motivo e così via e la logica, per evitare un circolo nella dimostrazione, deve arrestarsi a certi motivi ultimi, non motivati — i principî primi, indimostrati; gli ἄμεσα, di cui si tratta al § 31 — dei quali non può cribrare nè valutare assolutamente la forza.

P. es. ammettendo che la regola del « *nota notæ* » sia quella che autorizza a conchiudere, cioè sia il motivo (« *leading principle* » PEIRCE) [1]) del sillogismo:

Tutti gli uomini sono mortali

Pietro è uomo

Pietro è mortale;

La forza della motivazione sta in un altro sillogismo:

« Nota notæ est nota rei »

« La mortalità è una nota di uomo; ed uomo è una nota di Pietro »

« La mortalità è una nota di Pietro »

pel quale abbisogniamo di nuovo di una motivazione per concludere dalle premesse ecc.

Dovendo pertanto intendersi il principio della ragion sufficiente nel senso che ogni proposizione ha bisogno di un'altra come suo fondamento o motivo, possiamo aggiungere al principio formulato prima in modo ge-

1) PEIRCE, *op. cit.* p. 19.

nerale, un altro che può dirsi *principio di relatività* ed enunziarlo: « Ogni verità logica (definizione o teorema) vale solamente in unione (o relazione) d'altre verità logiche ».

Cfr. la relatività delle definizioni di $<$, 0, 1 e quindi della somma, del prodotto (al § 10, oss. fine) nonchè quella della falsità (§ 22, II).

§ 25. Le leggi che si riferiscono alle operazioni con le quantità logiche sono connesse strettamente col simbolismo della matematica logica [1]), ed anzi che leggi universali del pensiero devono risguardarsi piuttosto come il complesso degli assiomi (e delle definizioni) che regolano il calcolo colle quantità logiche. Ancor non è fissato sicuramente il loro numero, e, come per gli assiomi fondamentali di altre scienze p. es. della geometria, dell'aritmetica, v'è una certa arbitrarietà nella scelta, dandosi parecchie volte, puta caso, tre proposizioni, delle quali prese due qualunque come assiomi, l'altra ne deriva.

Secondo la più recente enumerazione, quella del Prof. Peano (Rivista di mat. fasc. febbr.-marzo 1891, p. 26 seg.), sarebbero assiomi:

(1) $a < a$
(2) $a < a.a$
(3) $ab < a$
(4) $ab < ba$
(5) $abc < acb$

1) Questo simbolismo si fonda specialmente sul segno della subordinazione e sulla sua negazione: sarebbe tutt'altro se in luogo di questo si scegliesse un altro p. es. il segno dell'eguaglianza o quello della disgiunzione con le loro negazioni. Cfr. Ladd *op cit.* Schröder *op. cit.* vol. II. Parte I. p. 119, 123.

$$(6)\ (a < b) < (ac < bc)$$
$$(7)\ (a > o)\ (a < b) < (b > o)$$
$$(8)\ (a < b)\ (b < c) < (a < c)$$
$$(9)\ (b > o) < [(a > o) < (ab > o)]$$
$$(10)\ (a < b) < (b_1 < a_1)$$
$$(11)\ (a_1)_1 < a$$
$$(12)\ aa\ = o$$

nei quali però talvolta può sostituirsi al segno < il segno dell'eguaglianza. L'(1) si riferisce al principio d'identità, (2) — (5) esprimono proprietà del prodotto; gli ultimi si riferiscono alla negazione. Sembra però che ulteriori semplificazioni sieno possibili (cfr. SCHRÖDER, *op. cit.* vol. I, p. 710); p. es. che possa ommettersi il (7) come dedotto dall'(8) — che è il principio dell'illazione —. Vedi la enumerazione degli assiomi, riassunti dallo SCHRÖDER (*op. cit.* vol. II §§ 29, 31) e l'articolo di W. E. JOHNSON *The logical calculus. 1. General Principles,* testè comparso nel « Mind ».

Va notato il così detto *principio di dualità*, che suona: « da ogni formula valevole nella logica si può dedurre un'altra, scambiando fra loro i segni × e +, < e >, 0 ed 1, e lasciando invariato il segno = ».

PARTE II

Delle forme sistematiche

Cap. I

Teoria generale

---

§ 26. Si disse dottrina delle forme sistematiche quella parte della logica che tratta del pensiero considerato, oltre che nella sua forma, nel suo contenuto in generale. Essa ha quindi di mira tanto la esattezza formale che la verità materiale del pensiero. Però siccome è parte della logica pura, teoretica, non considererà le singole verità del contenuto, chè allora, diventando nozione determinata di una particolare scienza, perderebbe il carattere normativo ed universale che per la logica pura o teoretica vien richiesto — sibbene riguarda la verità di contenuti, che si lasciano a bella posta indeterminati ad ulteriori specializzazioni. In breve studierà i tipi delle forme logiche riempiute da termini reali; studierà il pensiero formalmente esatto e materialmente vero, in generale. Per

quanto si riferisce al primo requisito — esattezza formale — il pensiero dovrà mostrarsi in una delle forme già studiate: e pertanto dovremo necessariamente rivolgere la nostra attenzione a ciascuna delle forme elementari, esaminandole ora però anche in rispetto alla verità materiale. Quindi mentre nella prima parte si esaminarono tali forme come si riscontrano in ogni discorso ragionato, ricorrente pur anco nella vita usuale, dove non sempre — come p. es. nelle dispute — emerge la rigorosa verità del contenuto; in questa seconda parte, importandoci le nozioni veraci che in tali forme si contengono, le si studieranno come parti del pensiero scientifico.

Una scienza è appunto un sistema di nozioni vere, relative ad un determinato oggetto o campo di studio [1]).

§ 27. La teoria delle forme sistematiche si divide nei seguenti capitoli:

I. Dottrina della definizione e della divisione. II. Dottrina dell'argomentazione o della prova. III. Dottrina del metodo.

Il primo si riferisce al concetto considerato rispettivamente secondo il suo contenuto e secondo la sua sfera; il secondo al giudizio, il terzo al sillogismo. Ma, mentre nella I Parte si considerò il concetto come elemento, il giudizio come derivato dal concetto, il sillogismo dal giudizio, quì si considera il concetto in quanto è parte di giudizî, il giudizio in quanto è

1) Cfr. GALUPPI *op. cit.* vol. I p. 13.

parte di sillogismi, il sillogismo in quanto è parte di un sistema di sillogismi concatenati.

Pertanto colla definizione e colla divisione si studierà la verità materiale dei concetti e si indagherà la influenza di tale verità per la verità materiale dei giudizî. Coll'argomentazione si studierà la verità materiale dei giudizî e si investigherà la influenza di tale verità per la verità materiale dei sillogismi, ossia di altri giudizî da quelli dedotti, come conclusioni di varii raziocinii. Col metodo si studierà la verità materiale di sillogismi e si investigherà la influenza di tale verità su sistemi di sillogismi o di nozioni concluse, ordinate in un tutto: o, in altri termini si studierà il processo col quale più nozioni verranno sistematicamente ridotte in una unità.

Nella dottrina delle forme elementari avevamo ritrovato nel sillogismo il giudizio ed il concetto come elementi (cfr. § 4), ora per far rilevare il lato sistematico di queste forme e la loro funzione, osserviamo che il sillogismo si riduce materialmente al giudizio ipotetico

$$\alpha < \beta$$

« se è vero α (il sistema delle premesse) è vero β (la conclusione) » ed equivale al giudizio categorico composto:

$$« \alpha = 0 \text{ oppure } \beta > 0 »$$

cioè « o non è vero α (sono false una o più premesse) oppure è vero β (nel caso che nessuna delle premesse sia falsa, cioè che sia $\alpha > 0$).

Ora la dottrina sistematica del giudizio, cioè l'argomentazione, ha l'ufficio di studiare quando α sia da porsi eguale a zero e quando no, e di esaminare quali effetti da tali determinazioni

....

1) Possiamo dunque dire che, considerandone il lato ontologico, in questa parte della logica si tratta della verità materiale delle quantità logiche, cioè delle cose e dei fatti considerati come reali; della verità materiale delle relazioni, cioè delle proprietà delle cose e delle leggi dei fatti; e della verità materiale delle conclusioni; cioè delle motivazioni, dei « perchè », che collegano fra loro le proprietà delle cose e le leggi dei fatti.

risultino per la verità materiale del sillogismo, cioè che valore debba attribuirsi alla conclusione β.

Analogamente tanto le premesse (che costituiscono α) che la conclusione (β) sono giudizî della forma:

$$a < b$$

i quali hanno il medesimo significato ambiguo rispetto alla realtà materiale; essi equivalgono a:

$$(a > o) < (b > o)$$

« se vi è *a*, esso è *b;* vi è *b* » cioè lasciano incerti nell'alternativa

« $a = o$ oppure $b > o$ »

« o non vi è a, oppure vi è b (che è nota di a, supposto esistente). La dottrina sistematica del concetto, ha l'ufficio di studiare quando debba porsi $a = o$ e quando $a > o$, e di esaminare quali effetti da tali determinazioni risultino per la verità materiale del giudizio e quindi del predicato *b*) [1]).

La dottrina delle forme sistematiche ha dunque il compito di stabilire quando una quantità logica A esiste e quando no, ossia di stabilire quale delle due relazioni

$$A = o \qquad A > o$$

— che al § 38 vedemmo egualmente possibili — abbia realmente luogo; e quindi di rilevare gli effetti che per le forme superiori formate da A, derivano. Questi effetti si deducono necessariamente con le leggi del pensiero (esposte alla Parte I cap. V), le quali rego-

lano la connessione dei nostri pensieri in generale; e così possiamo notare un parallelismo fra le dottrine delle forme sistematiche e i tre principî di identità, contraddizione e ragion sufficiente.

La definizione e la divisione appunto non sono altro che la espressione della identità di un concetto col prodotto delle sue note o la somma delle sue parti. Nella dottrina dell'argomentazione possiamo dedurre la falsità o verità di un giudizio dalla verità o falsità riconosciuta di un altro, soltanto mediante il principio di contraddizione; e soltanto col principio della ragion sufficiente possiamo stabilire il nesso di causalità fra due giudizî, interponendovi il segno $<$, e quindi trattare sistematicamente della verità materiale dei sillogismi.

Cap. II

Dottrina sistematica del concetto

---

§ 28. Teoria generale — § 29. Teoria della definizione
§ 30. Teoria della divisione

§ 28. Nella dottrina sistematica del concetto si tratta di istituire una identità tra due membri dei quali il primo (« definendo » o « dividendo ») è un concetto dato x. A seconda che l'altro (« definiente » o « dividente ») è posto nella forma di un prodotto o di una somma la identità esprime una definizione [1]) od una divisione [2]), così:

1) ὁρισμός.
2) διαίρεσις.

$x = abc....$	$x = a + b + c....$
p. es. « il barometro è uno strumento fisico che fa conoscere il peso dell'aria atmosferica e le sue variazioni »;	p. es. « i triangoli sono equilateri, isosceli o scaleni »;
è una definizione.	è una divisione.

Si vede che la definizione non è altro che un giudizio d'identità congiuntivo; ed il processo col quale è fatta è quello della determinazione. La divisione non è altro che un giudizio d'identità disgiuntivo.

Al giudizio d'identità misto, cioè della forma

$$x = ab + cd + ...$$

non corrisponde una nuova forma sistematica, esso si riduce ad una specie di divisione (così detta condivisione). Cfr. § 30.

Secondo quanto si disse nella prima parte, con la definizione si esprime il contenuto (prodotto dei sovraordinati) e con la divisione la sfera (somma dei subordinati) del concetto dato.

Per trattare delle leggi comuni a queste due forme sistematiche esprimiamole con le equazioni:

$$x = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad\qquad x = \sum_{k=1}^{m} b_k$$

e consideriamo le condizioni a cui debbono soddisfare in generale, tanto nel caso che il membro a destra sia affetto dal segno del prodotto (Π) o da quello della

somma (Σ) — le quali due operazioni, si sa, corrispondonsi perfettamente pel principio di dualità. . .

1). Affinchè il segno = possa esser posto fra i due membri è necessario che valgano simultaneamente le due relazioni:

(1)... $x < \prod_{i=1}^{n} a_i$	(1).... $x < \sum_{k=1}^{m} b_k$
(2).... $\prod_{i=1}^{n} a_i < x$	(2).... $\sum_{k=1}^{m} b_k < x$

Se ciò non avviene la definizione o la divisione non può farsi: e se è così fatta si dice *inadequata;* Quando vale solamente la (1) si dice troppo ampia; se vale la (2) e non la (1) si dice troppo ristretta.

P. es. « Gli Abissini sono un popolo dell'Africa » è una definizione troppo ampia; « Le case di abitazione sono costruite con mattoni o con pietra o con terra o con ferro o con legno » (Jevons) è una divisione troppo ristretta.

2) Il numero *n* dei fattori del definiente dev'essere il minimo possibile; ed una definizione espressa da	Il numero *m* degli addendi del dividente dev'essere il minimo possibile; ed una divisione espressa da
$x = \prod_{i=1}^{n+1} a_i = a_{n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i$	$x = \sum_{k}^{m+1} b_k = b_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} b_k$

ove sia già

$$x = \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \Big| \qquad x = \sum_{k=1}^{m} b_k$$

e quindi essendo

$$\prod_{i} a = a_{n+1} \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \Big| \qquad \sum_{k=1}^{m} b = b_{m+1} + \sum_{k=1}^{m} b_k$$

è

$$a_{n+1} > \prod_{i=1}^{n} a_i \qquad \Big| \qquad b_{m+1} < \sum_{k=1}^{m} b_k$$

cioè

a_{n+1} è sovraordinato al definiente | b_{m+1} è subordinato al dividente;

si dirà *sovrabbondante*, essendo tale il numero

dei fattori $n+1$ | degli addendi $m+1$.

P. es. « I libri sono utili, dilettevoli od inutili » è una divisione sovrabbondante. — Una divisione non è certamente sovrabbondante quando, analogamente a quanto veniva richiesto pei giudizi divisivi propriamente detti, i singoli addendi sono fra di loro disgiunti, cioè il prodotto di qualsivoglia paio d'essi è zero. Cfr. § 30.

Una definizione sovrabbondante sarebbe « un parallelogrammo è un quadrilatero avente i lati opposti uguali e paralleli » (Lindner).

3) Affinchè

la definizione	la divisione

sia veramente una forma sistematica, essa non deve ridursi alla semplice espressione del principio d'identità, cioè essa non deve avere la forma

$$x = x$$

che sarebbe una *tautologia* (*idem per idem*).

P. es. « Il triangolo è una figura triangolare ». « Gli animali terrestri-acquatici sono quelli che vivono in terra od in acqua » sono una definizione od una divisione tautologica.
Una forma erronea simile è il *circolo* (*circulus in definiendo*) quando il definiente viene spiegato col definendo: p. es. « un battaglione è l'unione di quattro compagnie » ed « una compagnia è la quarta parte di un battaglione ». —
Per la 3) non può essere

$a_k = o$	$b_k = 1$

e per la 2) non può essere

$a_i = 1$	$b_k = o$

onde si può asserire che

ciascun fattore del definiente	ciascun addendo del dividente

dev'essere una quantità reale e parziale:

$o < a_i < 1$	$o < b_k < 1$

§ 29. Conoscendo un numero n sufficientemente grande di note si può definire qualunque quantità logica: all' uopo basta formarne il prodotto; p. es. sapendo che un quadrato ha quattro lati eguali ed (almeno) un angolo retto.... lo si definisce dicendo: il quadrato è la figura avente quattro lati eguali, (almeno) un angolo retto.....

Si dimostrò che tale proposizione vale, ed in che senso, per i concetti individuali [1]) e, quindi, per qualunque concetto generico [2]), dal quale per determinazione ai primi si perviene. — Per quanto si disse al § 10 l'« *universe of discourse* » ed i concetti massimi (categorie) non si possono decomporre in fattori, nè quindi definire altrimenti che con una tautologia. Lo « zero » può definirsi in infiniti modi col prodotto di qualsiasi quantità tra lor disgiunte.

Spesso anzichè enumerare tutte le singole note pertinenti ad un concetto: ciò che sarebbe incomodo e, talvolta, impossibile a fare, si raggruppano più note in un concetto, che entrando come fattore nella definizione, surrogherà più fattori speciali di cui è prodotto, e si dirà nota principale od essenziale del definendo. P. es. nella definizione « La macchina a vapore è quella macchina in cui il vapore agisce come forza motrice » il nome « macchina », che designa una pluralità di note, è il genere prossimo.

A tale raggruppamento di più note in una si riduce il canone: « la definizione avvenga mediante il genere

1) A. Nagy. *Fondamenti del calcolo logico.* Napoli, Pellerano, 1889. Cap. IV.
2) *ibid.* p. 22.

prossimo e la differenza specifica » [1]; intendendosi per *genere prossimo* il concetto

$$\prod_{i=1}^{n-1} a_i$$

prodotto colla moltiplicazione di (n — 1) note, cui distinguiamo ancor più da vicino nella definizione, coll'aggiunta dell'*n* nota a_n (*differenza specifica*):

$$x = a_n \prod_{i=1}^{n-1} a_i.$$

a_n, cioè la differenza specifica può ridursi ad una quantità numerica (grandezza, valore speciale del genere prossimo) [2]. Inoltre è evidente la analogia della fissazione di un concetto (elemento) mediante le sue *n* note, con la fissazione di un punto mediante i valori di *n* variabili indipendenti (parametri, coordinate) in una varietà (moltiplicità) *n* dimensionale. Su queste due proposizioni si basa la possibilità di rappresentare graficamente le quantità logiche [3].

Potendosi in un rapporto di identità scambiare i due membri, sonvi due forme per ogni definizione

1) ὁ ὁρισμὸς ἐκ γένους καὶ διαφορῶν ἐστίν (Arist. *top.* I, 8).

2) *Fondamenti* p. 17.

3) Vedi le mie note *sulla rappresentazione grafica delle quantità logiche*, (Rend. di R. Accad. di Lincei, vol. VI. p. 50-56, 373-378.

$$(1) \qquad x = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$(2) \qquad \prod_{i=1}^{n} a_i = x.$$

La (1), dove vien posto anzitutto il definendo e quindi si considerano le note in cui vien decomposto, si dice definizione *analitica*; La (2), nella quale la nostra attenzione si rivolge prima alle note componenti e quindi al concetto da esse composto, si dice *sintetica o genetica*. P. es. sono definizioni della (1) specie tutte quelle finora date in questo capitolo. Della (2) specie sarebbero: « Se io tolgo ad un altro ciò che egli legittimamente possiede commetto un atto che dicesi *furto* » (CANTONI). « Un punto che si muova in un piano intorno ad un altro punto fisso in maniera da conservare sempre una eguale distanza da questo, descrive un cerchio » (LINDNER).

In ogni caso con la definizione noi non facciamo altro che dichiarare ciò che dobbiamo pensare sotto un dato nome in uso, x, col quale designiamo il concetto da definirsi.

Se non vi fosse questo nome speciale del concetto, la fissazione di quest'ultimo non potrebbe avvenire che coll'indicazione delle sue note e la definizione si ridurrebbe ad una tautologia [1]).

1) Quest'era già l'opinione degli scettici. Cfr. ARIST. *Metaph.* IV, 29.

Quindi tutte le definizioni sono per loro natura *nominali* e dipendenti dal linguaggio [1]. Si diranno invece definizioni *reali*, quelle che avranno di mira anche l'esistenza oggettiva (metafisica) del definendo (x) e, quindi, delle note (a_i) con le quali lo si definisce.

Se ha da essere

$$\prod_{i=i}^{n} a_i > o$$

è necessario che valgano i giudizî

$$a_i > o, \quad a_i a_j > o \quad (i, j = 1, 2 \ldots n);$$

però lo studio ulteriore di questi singoli giudizî esistenziali, collegandosi alle speciali verità della scienza e dell' esperienza, trascende i limiti della logica pura.

Similmente, sembra spettare più alla rettorica che alla logica lo studio delle così dette definizioni imperfette, le quali talvolta suppliscono (più o meno male) alle vere definizioni, e sarebbero: 1) la locazione, 2) la distinzione, 3) la caratteristica 4) la spiegazione, 5) la descrizione e 6) il confronto [2]. La 2) e la 6) si riducono ad un raggruppamento imperfetto delle note nel genere prossimo, le altre alla scelta di una imperfetta differenza specifica: tutte sono forme sistematiche troppo ristrette. Cfr. § 28, 2.

---

2) ὁ ὁριζόμενος δείκνυσιν ἢ τί ἐστιν ἢ τί σημαίνει τοὔνομα. Arist. *Anal. post.* II, 7. La questione delle definizioni reali e nominali fu lungamente agitata dai filosofi. Vedi la chiara esposizione che ne fa il Cantoni (*op. cit.* p. 154 e seg.).

2) Lindner *op. cit.* § 67.

§ 30. Una quantità logica *a*, può in generale, esser decomposta in parti, così che equivalga alla somma delle medesime. All'uopo basta trovare un'altra quantità *b*, tale che sia

$$(1)\ o < ab < a$$

— il segno < anche qui è negazione di « eguale » —; *a* è allora diviso da *b* in due parti, *ab* ed ab_1 che son fra loro disgiunte:

$$(2)\ (ab)\ (ab_1) = o$$

e complementari per *a:*

$$(3)\ ab + ab_1 = a.$$

Queste due ultime equazioni esprimono due condizioni essenziali per una perfetta divisione [1])

Quelle quantità per le quali non può trovarsi un *b* tale che sussistano le dette 3 equazioni si chiamano quantità indecomponibili e sono individui (elementi) oppure quantità evanescenti.

Se la (2) non vale, le parti non sono disgiunte (cfr. § 28 II nota) ma compenetrandosi fra di loro non dividono nettamente la sfera del dividendo p. es. chi dividesse i libri consigliabili (a) in utili (b) ed in dilettevoli (c), farebbe una cattiva divisione, perchè è:

1) Cfr. Bain, *op. cit.*, vol. II p. 290,

$$(ab)\,(ac) > o,$$

potendosi dare libri utili e dilettevoli insieme.

Se non vale la (3) la divisione è o troppo ampia o troppo ristretta (cfr. § 28 I).

Similmente per la divisione di un concetto ($\hat{a}$) in un numero qualsivoglia (n) di parti (ab_k), basta che sia

$$(1)\ldots\quad o < ab_k < a \qquad (k, = 1, 2,\ldots n)$$

$$(2)\ldots\quad (ab_k)\,(ab_i) = o \qquad (k, i = 1, 2\ldots n) \quad k \gtrless i$$

$$(3)\ldots\quad \sum_{k=1}^{n} ab_k = a.$$

a è, come prima, l'intero dividendo; gli ab_k sono i termini (membri, parti) della divisione, i b_k le differenze specifiche. Affinchè la (3) sia soddisfatta basta che sia

$$b_k \geqq a.$$

Il concetto generico della classe $\Sigma\, b_k$, si chiama fondamento (principio) della divisione. P. es. nella divisione dei corpi in solidi, liquidi ed aeriformi il fondamento della divisione è lo stato d'aggregazione delle molecole; dividendo i vini in bianchi e rossi il fonda-

mento è il colore ecc. A seconda che il numero dei termini (n) è due, tre.... o più la divisione si dice dicotomia, tricotomia.... politomia.

Dicotomie perfette s'ottengono sicuramente prendendo per differenze specifiche un concetto b e la sua negazione b_1; così che è già per definizione

$$b.b_1 = o$$

$$b + b_1 = 1$$

e quindi la (2) e la (3) sono soddisfatte. b dev'essere però scelto in modo da soddisfare anche la (1). Tale è p. es. la divisione dei libri in utili ed inutili; ecc.

Si hanno politomie giuste assegnando alla differenza specifica b_k, che può essere ridotta ad una quantità numerica (cfr. § 29 fine) tutti i valori possibili. A queste — come giustamente osserva il LINDNER [1] — appartengono le divisioni delle temperature, dei suoni, la divisione dei corpi secondo la densità o la solidità, la divisione degli uomini secondo le differenti dimensioni del corpo e delle sue parti, specialmente del cranio e dell'angolo facciale; delle città secondo il numero degli abitanti, dei paesi secondo la densità della popolazione ecc. — Questa gradazione può, ancora, arrestarsi ad un numero qualunque e comprendere tutti i numeri rimanenti in un termine che è la negazione dei termini assunti, ponendo p. es. in

$$a = ab_1 + ab_2 + ab_3 + ab_4 \ldots\ldots$$

$$b_4 + b_5 + b_6 \ldots = b_m$$

la divisione può ridursi alla tetratomia:

1) *Op. cit.* p. 122.

$$a = ab_1 + ab_2 + ab_3 + ab_m$$

Così, arrestando due volte la divisione con un limite massimo ed uno minimo possiamo dividere la città in: città che hanno meno di 1000 abitanti, città che ne hanno da 1000 a 10,000, da 10,000 a 100,000, da 100,000 a un milione, e città che hanno più d'un milione d'abitanti.

Nella trattazione scientifica il tutto viene ripartito non con una sola ma con ripetute divisioni, e s'ha ciò che si dice una *classificazione*. Le divisioni ulteriori possono effettuarsi di nuovo sul dividendo dato, oppure su alcune delle parti ottenute mediante la prima divisione. Nel primo caso abbiamo la così detta *condivisione* [1]). Dato, ad esempio, il tutto *a* lo dividiamo primieramente nelle parti ab_1, ab_2, ab_3 ...., prendendo per fondamento della divisione b: quindi prendendo per fondamento c, ripartiamo il medesimo a in ac_1, ac_2, ac_3 . . . .

I prodotti (ab_1) (ac_1), (ab_1) (ac_2) . . . . . ovverossia ab_1c_1, ab_1c_2 che s'ottengono eseguendo le moltiplicazioni nell'equazione:

$$a = a(b_1 + b_2 + b_3 + \ ) (c_1 + c_2 + c_3 + ...)$$

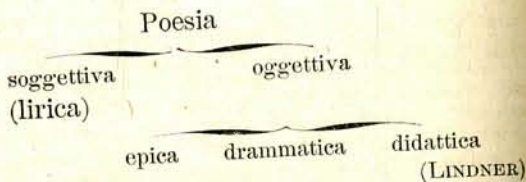
sono nuove parti di a, che si dicono risultati della

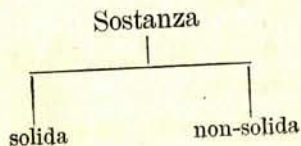
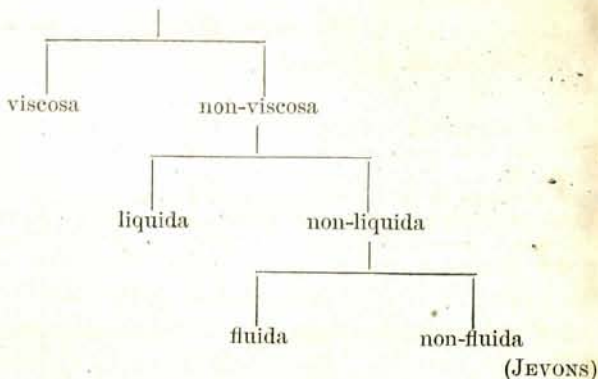
1) συνδιαίρεσις.

condivisione, cioè delle due divisioni di a per b e per c; alcune d'esse possono svanire.

P. es. dividendo i triangoli prima secondo la grandezza relativa dei loro lati, poi secondo quella degli angoli, abbiamo la condivisione:

« i triangoli sono acutangoli equilateri, acutangoli isosceli, acutangoli scaleni, rettangoli isosceli, rettangoli scaleni oppure ottusangoli isosceli od ottusangoli scaleni ». Manca la possibilità di due termini.

Nel secondo caso dopo d'aver diviso una quantità *a* nelle sue parti ab_1, ab_2 .... suddividiamo qualcuna di queste parti, p. es. ab_2 in ab_2c_1, ab_2c_2 ..... P. es. la divisione rappresentata dallo schema:

Questo processo si dice *suddivisione*. Una forma speciale ne è la divisione continuata, in cui si parte da una dicotomia, si suddivide il termine negativo della medesima con altra dicotomia e così di seguito p. es.

(JEVONS)

Questo modo di classificare è sempre esatto.

Il fondamento dev'essere mantenuto per tutta la divisione e, possibilmente anche nelle suddivisioni. Esso dev'essere in stretto nesso coll'essenza del concetto da dividersi e col fine della divisione: così il medico non fa delle piante la medesima distinzione che ne fa il botanico (CANTONI), e la divisione degli uomini secondo il colore degli occhi non sarebbe lodevole perchè si basa su una nota accidentale. — Nella classificazione non vi dev'essere il salto, ma i membri del dividente devono essere derivati immediatamente dall'ultima divisione. Vi sarebbe un salto nella classificazione degli esseri in animali, piante, minerali, dovendosi prima distinguere in organici ed anorganici

---

CAP. III

Dottrina sistematica del giudizio

---

§ 31. Dell'argomentazione

§ 31. Si disse che nella dottrina sistematica del giudizio si esamina la verità materiale del giudizio stesso, in quanto questo fa parte di giusti sillogismi.

Diffatti si sa (§ 27) che ogni sillogismo si riduce alla forma

$$\alpha < \beta$$

« se è vero α, il sistema delle premesse, è vera la conclusione β. La dottrina elementare ci dà questa connessione tra α e β, ma non ci dice nulla intorno alla realtà di β, in quanto questa è dedotta da α. Cioè non decide dell'alternativa

$$\beta > o \quad \text{oppure} \quad \beta = o$$

β può essere vero, ma non si è certi che lo sia. Il vero accertato è *reale* (esistente, $>$ o). Perchè β sia reale è mestieri che sia $\alpha > o$; bisogna adunque provare la realtà del giudizio (o dei giudizî) α.

Si dice *argomentazione* (dimostrazione, prova) [1]) quella operazione che prova la realtà di un giudizio colla realtà di un altro. All'uopo giova distinguere tre elementi:

1) La *tesi* o proposizione da dimostrarsi (β);

2) Gli *argomenti* (motivi, prove) — sistema di premesse (α);

3) Il *nerbo dell'argomentazione* (« nervus probandi ») o forma sillogistica che fa dedurre β da α (il segno $<$).

Ma anche il giudizio motivo (α) per essere accertato avrà bisogno di un altro giudizio α', questo di un α'' e così via; e d'altra parte potremo provare con β un altro giudizio β', con

1) Gr. ἀπόδειξις Lat. *demonstratio, probatio* Ted. *Beweis.*

questo un successivo β''' ecc. di modo che avremo una serie di giudizii, di cui ognuno è prova del giudizio seguente ed è provato dal precedente:

$$\ldots\ \alpha''' < \alpha'' < \alpha' < \alpha < \beta < \beta' < \beta''\ \ldots$$

Questa serie dovrà arrestarsi ad una certa proposizione $\alpha^{(n)}$ — di minima estensione — tale che sia prova delle susseguenti ma essa medesima indimostrabile da un'altra $\alpha^{(n+1)}$, perchè se la serie fosse infinita non vi sarebbe vera prova ed ogni dimostrazione sarebbe illusoria. D'altra parte evvi un altro estremo $\beta^{(m)}$ — di massima estensione — che è provato dai precedenti, ma che non può provare un'altra nuova proposizione $\beta^{(m+1)}$.

Tali proposizioni $\alpha^{(n)}$ — che sono i giudizî più universali, il « primo intelligibile », analogo per l'estensione all'individuo nella teoria del concetto, si dicono *immediate* [1]). Se $\alpha^{(n)}$ è tale che la sua verità è evidente, indiscutibilmente certa e che si impone all'umana ragione si dice assioma (ἀξίωμα); com'è p. es. quello che « due quantità eguali ad una terza sono eguali fra di loro »; sono assiomi tutti i principî dell'umana ragione studiati al Cap. V. Se invece la $\alpha^{(n)}$ viene *posta* come vera è una *tesi* (θέσις) od anche una *ipotesi* (ὑπόθεσις), qualora ha da venir confermata dalle conclusioni o dall'esperienze: p. es. è una ipotesi la teoria dell'étere, quella di Darwin ecc. Si chiama *postulato* (αἴτημα) quando chi dimostra chiede agli uditori, che non ne vorrebbero forse concedere la verità, il permesso di assumerla come vera.

Le proposizioni $\beta^{(m)}$ sono invece i giudizî più individuali, il « primo sensibile », analogo per l'estensione alle categorie nella teoria del concetto, e sono le affermazioni dei fatti immediatamente percepiti [2]).

....

1) Ἀρχὴ δ᾽ἐστὶν ἀποδέξεως πρότασις ἄμεσος δὲ ἧς μὴ ἐστιν ἄλλη πρότερα. Arist. *Anal. post.* I, 2.

2) Secondo Aristotele il primo sensibile è il πρότερον πρὸς ἡμᾶς, il primo intelligibile il πρότερον τῇ φύσει. Cfr. *Anal. post.* I, 2.

A seconda che si parte dagli argomenti per arrivare alla tesi, oppure si procede da questa a quelli, abbiamo due specie diverse di argomentazione che si dicono *sintetica* (o progressiva) l'una ed *analitica* (o regressiva) l'altra [1]. Lo schema della prima sarebbe:

$$\frac{\begin{array}{c}\alpha > o \\ \alpha < \beta\end{array}}{\beta > o}$$

e tali sono p. es. le dimostrazioni degli elementi di Euclide; lo schema della seconda sarebbe:

$$\frac{\begin{array}{c}\beta > \alpha \\ \alpha > o\end{array}}{\beta > o}$$

Così si risolvono p. es. le equazioni nell' algebra: « se il valore x è una radice dell'equazione, esso deve soddisfare alle condizioni richieste; esso soddisfa alle medesime; è dunque una soluzione ».

Si distingue inoltre l'argomentazione *diretta* da quella *indiretta* [2].

Nella prima si dimostra la realtà della tesi — cioè che è $\beta > o$ oppure $\beta = 1$ — mediante la realtà degli

1) I termini latini sono, *per compositionem* (da σύνθεσις) e *per resolutionem* (da ἀνάλυσις).

2) Aristotele distingue la dimostrazione in affermativa e negativa (καταφατικὴ καὶ ἀποφατικὴ ἀπόδειξις) e ritiene la prima migliore. *Anal. post.* I, 25.

argomenti. Nella seconda si dimostra la falsità dell'opposto contradditorio (β_1) delle tesi — cioè si dimostra che è $\beta_1 < 1$ oppure $\beta_1 = 0$, da cui per inferenza immediata segue che $\beta > o$ oppure $\beta = 1$. Questo modo di dimostrare si chiama apagogico (ἀπαγωγή) oppure « deductio ad absurdum » (εἰς ἀδύνατον εἰσαγωγή) [1].

Il suo schema sarebbe:

$$\frac{\frac{\beta_1 < \gamma \quad \gamma = o}{\beta_1 = o}}{\beta = 1} \qquad \text{oppure} \qquad \frac{\frac{\beta_1 < \gamma \quad \gamma < 1}{\beta_1 < 1}}{\beta > o}$$

P. es. s'abbia a dimostrare che niun essere può produrre sè stesso (β).

Pongo che un essere produca sè stesso (β_1); un essere che produce sè stesso dee essere esistente (γ), poichè altrimenti non agirebbe producendo sè stesso: da un'altra parte, questo essere non dee esistere che dopo la sua produzione ($\gamma = o$); esso esiste dunque prima della sua produzione e non esiste prima della sua produzione. Ciò involve contraddizione. Dalla supposizione dunque, che un essere produce sè stesso, nasce una contraddizione: questa supposizione perciò è falsa ($\beta_1 = o$); e quindi è vera la sua contradittoria, cioè che *niun essere può produrre sè stesso* [2].

Lo schema della dimostrazione diretta sarebbe invece

1) Aristotele. Anal. pr. I, 23 e 26.

2) Galluppi. *op. cit.* vol. I p. 120-121.

$$\frac{\begin{matrix}\alpha < \beta \\ \alpha > 0\end{matrix}}{\beta > 0} \quad \text{oppure} \quad \frac{\begin{matrix}\alpha < \beta \\ \alpha = 1\end{matrix}}{\beta = 1}$$

« Se è vero α è vero β; α è (talvolta o sempre) vero; β è talvolta o sempre vero ». Tali sono le dimostrazioni date più su come esempî.

Sonvi alcune regole pratiche per dare una buona dimostrazione:

Rispetto alla tesi, 1) essa non deve essere un giudizio evidente (ἄμεσος), 2) deve rimanere la stessa in tutta l'argomentazione. Riguardo agli argomenti, 1) essi devono essere veri, 2) certi, 3) adequati, cioè necessarî e sufficienti per la prova della tesi; Riguardo al nerbo dell'argomentazione, esso dev'esser esatto cioè seguire le regole sillogistiche. - Chi non osserva le medesime incorre — volente o nolente — in qualche fallacia d'argomentazione — *sofisma* o *paralogisma*. — Queste fallacie furono accuratamente esaminate ed esposte da ARISTOTELE nel libro σοφιστικοί ἔλεγχοι. Lui seguirono, nell'enumerazione delle medesime, tutti i logici posteriori.

(Vedi p. es. LINDNER *op. cit.* p. 134-139, CANTONI *op. cit.* vol. I. p. 232-239, BAIN *op. cit.* vol. I. p. 401-407 ecc.); WHATELEY ne cangiò solamente l'ordine; il MILL (*op. cit.* vol. III p. 111-227 (vedi la succinta esposizione che ne fa il BAIN, vol. II p. 544-554) studiò e classificò i sofismi nell'induzione. Cfr. § 33.

CAP. IV

Dottrina sistematica del sillogismo

---

§ 32. Del metodo in generale — § 33. Del metodo inventivo
§ 34 Del metodo coordinativo ed espositivo.

§ 32. La dottrina sistematica del sillogismo prende in considerazione la realtà del medesimo, in quanto esso fa parte di un sistema ordinato di raziocinî. Ora

siccome « concatenando più raziocinî col fine di far conoscere distintamente un oggetto qualunque si forma una scienza » [1]), questa parte della logica, chiamata anche dottrina del metodo (da μετά ὁδός), si riferirà alle scienze in generale ed alla loro formazione e questa è l'ultima fase del pensare sistematico.

Veramente nell'unità complessa che costituisce una scienza non sempre appariscono come elementi forme sillogistiche complete collegate fra loro: più spesso si tratta di un sistema di nozioni (quantità logiche: concetti, giudizî) relative ad un oggetto. Nelle scienze descrittive o pratiche — che ricercano il « come » (ὅτι) non il « perchè » (διότι) delle cose e degli avvenimenti [2]) » — p. es. nelle scienze naturali, il metodo non può certo considerarsi come sistema di sillogismi, constando di pure definizioni e classificazioni e, talvolta, d'argomentazioni. Invece nelle scienze propriamente dette (speculative o teoriche) le nozioni appaiono come conclusioni motivate, sillogismi compiuti; ed è in queste che funziona il metodo sistematico.

Un sillogismo è reale in quanto è esatta la conseguenza « se vi è α vi è β », cioè se è rettamente interposto il segno $<$ fra le due quantità. Laonde nel metodo si ha sempre di mira il rapporto di subordinazione (inerenza o causalità) — sul quale vedemmo riposare ed essere costruita tutta la logica — e il principio universale dello stesso, che suona « *subordina il particolare* (α) *all'universale* (β) — cioè le proprietà alle cose, gli effetti alle cause « — Cfr. § 24.

---

1) Galluppi, *op. cit.* vol. I. p. 13.

2) Aristotele *(anal. post.* II, 1) enumera quattro questioni fondamentali: ζητοῦμεν δὲ τέτταρα τὸ ὅτι, τὸ διότι, εἰ ἔστι, τί ἐστίν; le prime due riferentisi agli avvenimenti, le ultime due alle cose; ma poi riunendo la prima e la terza, la seconda e la quarta le riduce alle due domande del come? e del perchè? delle quali la prima è il principio, la seconda il fine delle scienze *(anal. post.* II, 15, 16).

Ora per stabilire questa subordinazione possiamo partire dal particolare (metodo induttivo) o dall'universale (metodo deduttivo) [1].

Inoltre importa sapere come si possano formare gli universali (principî generali, leggi, verità) partendo dall'esperienza (*metodo inventivo*) e come convenga coordinarli fra loro e sovraordinarli ai particolari, ciò che forma l'oggetto del *metodo coordinativo*. Formate le nozioni motivate e ordinatele sistematicamente rimane ancora da studiare il modo col quale esse debbano esprimersi e comunicarsi ad altri, ciò che costituisce l'oggetto del *metodo espositivo* o didattico, il quale si trova alla linea limite della logica che confina colla pedagogia.

§ 33. I dati dell'esperienza non ci si presentano come giudizî universali: « tutti gli *a* sono *b* », ma come fatti singoli, cioè come giudizî particolari od individuali: « alcuni *a* sono *b* », « questo *a* è *b* ».

Per formare dei giudizî universali con questi dati ci serviamo dell'*induzione* (ἐπαγωγή).

Supponiamo di avere una serie di *n* giudizî particolari.

$$a_k < b \qquad (a_k = va_k = \text{« alcuni a »}$$

$$k = 1 . 2 \ldots . n);$$

per un teorema noto sarà anche

1) Vedi § 3, p. 15.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k < b$$

Ora sono possibili due casi: o la somma Σ è uguale (o maggiore) di una certa classe *a*, oppure no.

Nel primo caso possiamo scrivere

$$a < b$$

e diciamo « tutti gli a sono b » ed abbiamo formato un giudizio universale pel mezzo induttivo dell'enumerazione complela (*induzione perfetta*).

P. es. chi, dopo aver provato che il circolo, l'ellisse, la parabola e l'iperbola non possono aver più di due punti comuni con una retta, conchiudesse che tutte le sezioni coniche hanno la proprietà di essere segate al più in due punti da una retta, farebbe una induzione perfetta.

Nel secondo caso formiamo un giudizio induttivo per enumerazione incompleta (*induzione imperfetta*) asserendo che « tutti gli a sono b » quando

$$\lim \sum_{k=1}^{n} a_k = a$$

col crescere di *n*.

P. es. sarebbe una induzione imperfetta l'asserire che tutti i corpi possono cangiare il loro stato d'aggregazione, varian-

done la pressione e la temperatura, dopo aver esperimentato questo per un numero abbastanza grande di corpi. —

Sonvi ancora altre specie di induzione, che però si riducono da ultimo alle precedenti; p. es. quella per *eguaglianze del concludere*. Se dimostro che

$$a_1 < b$$

e so che in eguale maniera posso dimostrare che a_2, a_3 .... a_n sono b; ciò se so che, qualunque sia k è

$$a_k < b$$

ed è

$$\Sigma a_k = a$$

induco:

$$a < b.$$

« Di tale specie sono le induzioni della matematica, nella quale per mezzo d' un solo triangolo disegnato sulla tabella, si dimostra un teorema universale colla esplicita o tacita dichiarazione, potersi lo stesso teorema dimostrare in egual modo con qualsiasi altro triangolo » (LINDNER). Nè altrimenti « un mercante di vino ragiona generalizzando, in piccola proporzione, quando trae da una botte di vino soltanto un bicchiere ed inferisce che ogni altro bicchiere, riempito col liquido della stessa botte sarà simile a quello che gli servì di saggio. Ma egli sa che allora il vino era stato tanto ben mescolato da assomigliarsi in tutte le parti esattamente » (JEVONS). — Simile è la così detta *prova da n ad n + 1*, usata nelle matematiche, la quale si fonda sulla nozione della serie numerale continuata. P. es. per provare il teorema del binomio di Newton si dimostra che se esso vale per lo sviluppo di $(a + b)^n$ vale anche pel caso $(a + b)^{n+1}$. Ora si verifica la sua validità per $(a + b)^2$, $(a + b)^3$...

cioè $n = 2, 3$; quindi se vale per $n = 3$ vale anche per $n = 4$; e quindi per $n = 5, 6$... e così via.

Il così detto *ragionamento per analogia* nel quale si conclude dal particolare al particolare: p. es. nel giudicare che una data opera dev'essere scritta da un certo scrittore, per la somiglianza che ha nello stile, nel concetto... con altre opere conosciute del medesimo autore — si fonda pure su una induzione (incompleta).

Si vede, da quello che fu detto sinora, quanta sia l'importanza del metodo induttivo per il sapere scientifico. Però fu esagerata da taluni, che pretesero ricavarne la inutilità del metodo opposto, cioè del deduttivo e specialmente del sillogismo. L'obbiezione principale contro di questo sarebbe che la conclusione è già contenuta nelle premesse e quindi non reca nessun reale progresso alla scienza; anzi di fatto la conclusione deve esser conosciuta prima di stabilire le premesse.

P. es. nel sillogismo: « Tutti i pianeti hanno moto rotatorio Marte è un pianeta, dunque Marte ha un moto rotatorio » bisogna comprovare che Marte ha un moto rotatorio, prima di asserire (per induzione) che tutti i pianeti hanno moto rotatorio. — questa osservazione è giusta per le premesse ricavate mediante *induzione completa:* ma non vale per quelle dedotte per *induzione incompleta* o stabilite quali principî assiomatici; perchè queste possono applicarsi a casi non ancora considerati ed allora la conclusione è veramente una cognizione nuova: p. es. Dimostrandosi nella fisica col calcolo che quando un pendolo si allunga si rallenta il suo movimento, e si conclude che il calore dovrà rallentarne il movimento, perchè ne aumenta la lunghezza. (Ueberweg). — Sull'importanza del metodo deduttivo del resto convengono tutti i logici. Cfr. Mill *op. cit.* I, 209-242. Wundt. *Logik,* I, p. 285 segg. Schröder *Algebra der Logik*, I 174-179 Lindner *op. cit.*, p. 82-84 Cantoni *op. cit.* I, 209-215. ecc.

L'induzione incompleta è molto più frequente che la completa, avvegnacchè sia difficile conoscere tutti gli individui appartenenti ad una classe o tutte le occasioni nelle quali avviene un dato fenomeno; pertanto il giudizio $a < b$, che su essa si basa non avrà un valore assolutamente categorico, ma soltanto un grado più o meno grande di probabilità. Esso sarà una ipotesi che dovrà venir verificata, oltre che nei casi da

cui fu indotta, ancora nei casi avvenire: potendosi dare un a_m pel quale non valga il giudizio $a_m < b$, e così scoprire una *istanza* che smentisce il giudizio universale « tutti gli a sono b ».

P. es. il pontificato di Pio IX fu un'istanza la quale annullò il « *Non videbis dies sancti Petri in sede apostolica* » cioè la credenza che nessun Papa potesse raggiungere il 25.° anno in questa dignità.

Il grado di probabilità di un asserto viene misurato da una frazione il cui numeratore è il numero dei casi verificati, il denominatore quello dei casi possibili; nella induzione perfetta tale rapporto è eguale all'unità, che per tal modo esprime la certezza — Cfr. il simbolo 1 come sfera o campo di validità di un giudizio. — Per tanto si distinguono i giudizî in apodittici, assertorî e problematici [1]), secondo il valore oggettivo attribuito alla relazione espressa (modalità). I primi esprimono una relazione che vale necessariamente (probabilità = 1), i secondi una relazione che vale realmente, nel momento attuale, i terzi la pura possibilità (> o) che valga. Un significato analogo hanno i loro negativi, cioè i giudizî non necessarî, non reali, impossibili.

I logici moderni sogliono distinguere quattro gradi del ragionamento induttivo:

I. l'osservazione
II. l'ipotesi
III. il ragionamento deduttivo
IV. la verificazione,

che corrispondono appunto alla formazione dei giudizî universali (ipotesi) coi dati dell'osservazione; alla deduzione di altri giudizî (mediante il sillogismo) ed alla verificazione della ipotesi.

Ma non sempre i dati dell'esperienza ci forniscono giudizî individuali o particolari del tipo

---

1) Πᾶσα πρότασίς ἐστιν ἢ τοῦ ὑπάρχειν ἢ τοῦ ἐξ ἀνάγκης ὑπάρχειν ἢ τοῦ ἐνδέχεσθαι ὑπάρχειν. Arist. *Anal. pr.* I, 2.

$$a \underset{k}{<} b,$$

bensì, pel principio universale dell'azione scambievole tra le cose e della causalità tra gli avvenimenti, l'osservazione dei fatti naturali ci dà per risultato un gruppo di numerosi fenomeni speciali (circostanze d'un avvenimento, proprietà singola d'una cosa) quale conseguente (effetto, qualità) di un gruppo precedente. Sieno questi due gruppi o momenti dell' osservazione *m* ed *M:*

$$(1)\ m = abcd\ldots$$

$$(2)\ M = ABCD\ldots$$

Le singole circostanze sono rappresentate dai fattori a, b, c.... e rispettivamente A, B, C,...

Noi possiamo asserire, appoggiandosi al principio della ragion sufficiente, che la totalità dei fatti osservati nel momento *M* è l'effetto dei fatti avvenuti sul momento precedente *m*, e - basandosi sul principio dell'uniformità della natura (altro modo di enunziare il medesimo principio) - ogni qualvolta avverrà il momento m, succederà invariabilmente il momento M. Quindi scriviamo - Cfr. § 24:

$$m < M$$

ossia

$$abcd\ldots < ABCD\ldots$$

Limitandoci a studiare le cause di un certo fenomeno A, possiamo anche scrivere

$$abcd. \ldots < A$$

— ciò che segue *a fortiori* dalla subordinazione precedente.

Il numero delle cause o circostanze, che più o meno influiscono sul fenomeno da studiarsi, è, di solito, straordinariamente grande, anzi infinito. Essendochè, volendo essere esatti, noi possiamo asserire che, pel principio di causalità, il complesso degli avvenimenti che avvengono nell'universo è causa od effetto del complesso degli avvenimenti immediatamente susseguenti o precedenti (principio cosmologico della conservazione dell'energia: che è pure una speciale annunziazione della legge della ragione sufficiente). E' compito dell'osservatore di limitare convenientemente con metodi speciali d'osservazione e d'esperimento il numero delle circostanze da studiarsi, e di restringerle alle sole sufficienti.

Se il campo di validità dell'avvenimento causa è identico a quello dell'avvenimento effetto cioè se p. es.

$$a = A$$

allora la causa oltre che sufficiente è necessaria per il realizzarzi di A: ogni volta che v'è *a* v'è *A* e viceversa.

Per sapere quale (o quali) delle circostanze a, b, c... sia causa di A e quale no, bisogna avere più d'un caso d'osservazione. Il Sig. JOHN STUART MILL [1]) ci dà cinque canoni (che costituiscono i così detti quattro metodi dell'osservazione sperimentale) per stabilire la vera causa di A. Questi sono:

I) « Se due o più casi d'un fenomeno da esaminarsi non hanno che una circostanza comune, questa sola circostanza, nella quale i casi combinano, è la causa (o l'effetto) del dato fenomeno. » (Metodo di concordanza).

II) « Se due casi, in uno dei quali si presenta il dato fenomeno o nell'altro no, hanno comuni tutte le circostanze eccetto una, che comparisce nel primo e nell'altro no; questa circostanza per la quale differiscono i due casi è causa (od effetto) o parte necessaria della causa del fenomeno. » (Metodo diretto di differenza).

---

1) Y. S. MILL *op. cit.* vol. II p. 86-110.

III) « Se due o più casi, nei quali avviene il fenomeno hanno una sola circostanza comune; mentre in due o più casi, nei quali il fenomeno non avviene tal circostanza manca; questa circostanza per la quale differiscono le due serie di casi è la causa (o l'effetto) o parte necessaria della causa del fenomeno » (« metodo indiretto di differenza »).

IV) « Si tolga da un fenomeno la parte che, per mezzo di induzioni anteriori, si riconobbe essere effetto di certi antecedenti; il resto del fenomeno è l'effetto dei residui antecedenti (« metodo dei resti ») [1].

V) « Ogni fenomeno, che varia in qualche maniera, quando un altro fenomeno varia in certa guisa, è la causa (o l'effetto) di quest'ultimo fenomeno, oppure è connesso in un certo rapporto causale col medesimo. » (« Metodo delle variazioni concomitanti »).

Però questi canoni (checchè ne dica il MILL, *op. cit.* Vol. II, p. 110) non sono i soli mezzi possibili della ricerca sperimentale; e, come m'ingegnerò di mostrare in una prossima memoria, non hanno che un valore relativo e limitato.

Il problema più generale è questo: dato un sistema qualunque di relazioni logiche (casi d'osservazione), in cui entri una data quantità A, trovare di quali quantità essa è data indipendentemente (a mezzo della *eliminazione* di codeste) e di quali è funzione (a mezzo della *risoluzione*): questo problema è lo stesso problema fondamentale per la dottrina elementare (cfr. Parte I, Cap. IV).

I metodi di J. S. Mill accennano appunto a casi speciali di tali risoluzioni od eliminazioni, ma in un modo non sempre esatto.

§ 34. Si disse (§ 32) che nell'ordinamento delle nozioni in quel complesso che forma la scienza, vale il principio: subordina il particolare all'universale; e per-

1) Questo canone ed il precedente costituiscono, secondo il MILL, un metodo solo.

tanto questo ordinamento si riduce ad una classificazione motivata, ad una collocazione di individui (quantità logiche minori: cause o cose) in classi (quantità logiche maggiori: effetti o proprietà) le quali, è noto, li comprendono.

Ricordandoci della possibilità di rappresentare graficamente le quantità logiche (Cfr. §§ 9, 29), questa collocazione consisterà nel situare una quantità data nel luogo che la contiene, oppure nel fissare un punto mediante le sue coordinate (nelle quali essendo compreso, ne è l'intersezione). Laonde l'ordinamento sistematico delle nostre nozioni avrà una adequata rappresentazione nella disposizione o configurazione di una serie di punti od estensioni nello spazio.

Di queste configurazioni sono specialmente notevoli: *le rette parallele* le quali rappresentano p. es. il metodo sincronistico od il cronologico (secondo che sono orizzontali o verticali, supponendo orizzontale la linea temporale); *le rette convergenti*, che rappresentano il metodo sintetico, e *le rette divergenti* che rappresentano il metodo analitico [1]. La sinossi ed altri schemi p. es. l'albero porfiriano [2]; i circoli concentrici, rappresentanti le subordinazioni delle nozioni in una scienza, hanno il loro fondamento sulla medesima rappresentazione grafica dello spazio logico. — Però queste configurazioni non sono di solito così semplici, ma sono reti o tessuti complicati di cognizioni che costituiscono il sistema.

1) Di queste configurazioni tratto nel mio lavoro intorno al metodo che spero di pubblicare tra breve.

2) In questo, partendo dalla base costituita dal *genere generalissimo* (γένος γενικώτατον) ad esempió il concetto οὐσία, vanno mano a mano diramandosi i *generi speciali* (γένος καὶ εἶδος) p. es. i concetti di σῶμα, ἔμψυχον, ζῶον, ζῶον λογικόν, finendo colla *specie specialissima* (τὸ εἰδικώτατον εἶδος) p. es. ἄνθρωπος e da ultimo cogli individui particolari (μέρος, ἄτομον): Σωκράτης. PORFIRIO *Isag.* cap. III (περὶ εἴδους).

Un'altra questione di cui s'occupa la logica è: come si esprime e si comunica ad altri un sistema scientifico? Qui bisogna rilevare innanzi tutto un fatto importante: che nel parlare o in generale nel pensare psicologico, noi non possiamo cogliere un sistema completo di nozioni nè intuirne le loro molteplici relazioni sibbene son presenti singole nozioni e cogliamo una relazione alla volta. — La nostra mente passa *successivamente* da un'idea ad un'altra, subordina una nozione ad un'altra così che forma una serie di successioni temporali, il *filo* del discorso o del pensiero. Pertanto nello studio del metodo espositivo si considererà lo svolgimento dei sistemi di nozioni nella linea ideale del tempo: cioè si guarderà l'ordine col quale si enunzieranno i fatti l'un dopo l'altro — mentre nella nostra mente sono coesistenti.

Si hanno adunque due ordinamenti, uno di nozioni in quanto son fra loro connesse logicamente, cioè in quanto sono collocate nello spazio logico; l'altro delle nozioni — còlte in questo spazio logico — in quanto sono disposte nel tempo psicologico. Del primo esclusivamente s'occupa il metodo coordinativo o sistematico, d'entrambi l'espositivo.

Rappresentante su due coordinate (asse delle x e delle y) questi ordinamenti, e cioè sull'*ordinata* (y) la posizione nello spazio logico, sull'*ascissa* (x) il tempo; il *filo del discorso* ci apparirà come una curva che segnerà col suo elevarsi od abbassarsi il successivo cambiamento o passaggio di una nozione ad un'altra. — Astraendo dalla successione temporale, resta l'ordinamento spaziale logico, cioè per avere la configurazione (rete, tessuto) logica del sistema esposto bisogna proiettare la curva in un piano verticale al piano xy e parallelo all'asse y.

Nell'ordine (temporale) col quale si susseguono le idee in un discorso o in un trattato, possiamo distinguere due casi: o tale ordine è invertibile cioè le idee che vengono una *dopo* l'altra possono anche stare una *prima* dell'altra, ciò non influendo menomamente per il contenuto del tutto. Allora le nozioni stanno una accanto l'altra (nello spazio logico), sono semplicemente coordinate. Tali sono le nozioni nelle scienze descrittive. Se l'ordine non è invertibile, ma una nozione *deve* venir prima dell'altra, tra esse intercede il rapporto di subordinazione. Tali sono le nozioni nelle scienze speculative.

La distinzione in metodo storico ed in metodo psicologico-genetico (Cfr. LINDNER *op. cit.* p. 160 seg.) sembra doversi abbandonare perchè fondata su motivi extra-logicali. D'altra parte mi riservo di trattare altrove (vedi nota 1 alla pag. prec.) più diffusamente su questo argomento, che è già al limite della logica e sta per toccare la psicologia e la didattica.

AGGIUNTE E CORREZIONI

Per motivi indipendenti dalla mia volontà, vi fu un sensibile ritardo nella pubblicazione di questo libro, iniziata ancor l'anno scorso; così che ora dovrei modificare qua e là alcune cose; specialmente pel fatto che nel frattempo comparve la prima parte del II volume dell'opera dello SCHRÖDER (*Algebra der Logik*), nella quale è trattata la teoria del giudizio e del sillogismo. Ad ogni modo tenni conto di quest'opera nelle note e negli esercizi ai capitoli III e IV. Prego infine di voler rettificare i seguenti errori, che sfuggirono alla correzione delle bozze:

ERRATA CORRIGE

A pag. 12 lin. 11-12 dall'ultima invece di « definito » leggasi « definita »
» 18 » ult. } » 19 » prima } » « altre » » « altri »
» 26 » 12 dall'ultima » « esse » » « esso »
» 31 » 7 della prima » .... » 21, 22, 24
» 36 » penult. (in nota) » « tha » » « the »
» 38 » penultima » « VENS » » « VENN »
» 47 » ultima » « tantologia » » « tautologia »
» 49 » 8 della prima » « esprimono » » « esprimano »
» 55 » 3-4 dall'ultima inseriscasi « *Esercizî e problemi* »
» 55 » 4 invece di « Giudizi » » « § 15. Giudizi »
» 57 » 3 dall'ultima tolgasi « se ne daranno esempi negli esercizi »
» 64 » 4 dalla prima invece di « *negati* » leggasi « *negatio* »
» 73 » 9 » » » « delle altre » » « una delle altre »
» 78 » 8 dall'ultima » >, 0, » > 0,
» 112 » 3-4 » inseriscasi « *Esercizi e problemi* »
» 116 » 10 dalla prima invece di « delle » leggasi « colle »
» 123 » 2 dall'ult. (in nota) » « συμβεβηηκός » » « συμβεβηκός »
» 137 » 4 dalla prima » « *Camestres* » » « *Camestros* »
» 154 » 2 dall'ult. (in nota) invece di « deutscber naturforscher » leggasi « deutscher Naturforscher »

A pag. 157 lin. 9 dalla prima invece di > 1 leggasi < 1

» » » 12 » » » $f(\alpha_1 \alpha_2 a_2)$ leggasi $f(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

» » » 13 » » » $\Sigma(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_2)$ » $\Sigma(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

» » » 15 » » » $\Sigma(\alpha_1 \alpha_1 \ldots \alpha_n)$ » $\Sigma(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)$

» 159 » 7 » » » $f(0) \{ f(0)\, u_1 + f(1)\, u_1 \}$ leggasi

$f(0) \{ f(0)\, u_1 + f(1)\, u_1 \}_1$

» 182 » 10 dall'ultima tolgasi « 1) »

» 185 » penultima invece di $\overset{m+1}{\Sigma} b_k$ leggasi $\sum_{k=1}^{m+1} b_k$

INDICE

PARTE II - DELLE FORME SISTEMATICHE